Orientierungsaufgaben für die

ABITURPRÜFUNG
ab 2024

Im Auftrag des TMBJS erarbeitet von den
Fachberaterinnen und Fachberatern Mathematik Gymnasium.

MATHEMATIK
mit erhöhtem Anforderungsniveau

Prüfungsteil B

Hinweise für die Prüfungsteilnehmerinnen und -teilnehmer

Bearbeitungszeit: **300 Minuten**

Hilfsmittel Teil A:

Es dürfen außer Zeichengeräten **keine** weiteren Hilfsmittel verwendet werden.

Hilfsmittel Teil B:

- ein Computeralgebrasystem, das im Unterricht verwendet wurde (Dieses darf keine zusätzlichen Dateien oder Funktionen/Programme enthalten.)
- das Dokument für mathematische Formeln (Dieses darf keine Anmerkungen bzw. Ergänzungen enthalten.)

Bearbeiten Sie zuerst den Teil A (**sechs** von zehn Aufgaben). Beachten Sie Pflicht und Wahl.
Nach Abgabe der ausgefüllten Arbeitsblätter für den Teil A werden **alle** Aufgaben des Teils B mit den angegebenen Hilfsmitteln bearbeitet.

Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein.
Neben jeder Teilaufgabe steht die für diese Teilaufgabe maximal erreichbare Anzahl von Bewertungseinheiten (BE).

Aufgabe B1 - Analysis

1 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a\colon x \mapsto -\frac{a}{250}x^4 + \frac{1}{25}x^3$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ sowie $g_a\colon x \mapsto f_a(x) - \frac{3}{5}x$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von g_1.

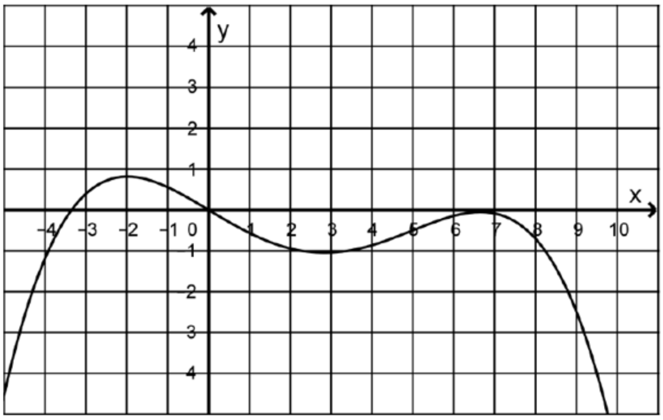


Abb.1

a) Berechnen Sie für den Graphen von f_1 die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Koordinaten des Extrempunkts. Zeichnen Sie den Graphen von f_1 in die Abbildung 1 ein.

6 BE

b) Geben Sie an, für welche Werte von x der Graph von f_1 oberhalb des Graphen von g_1 verläuft und für welche unterhalb. Begründen Sie Ihre Angabe.

3 BE

c) Für jeden Wert von a gilt:

I Die Funktionsterme von f_a und g_a unterscheiden sich nur um den Summanden $-\frac{3}{5}x$.

II Der Graph von f_a hat genau zwei Wendepunkte, deren x-Koordinaten 0 und $\frac{5}{a}$ sind.

Geben Sie an, was sich aus I und II hinsichtlich der Anzahl und der Lage der Wendepunkte des Graphen von g_a im Vergleich zu den Wendepunkten des Graphen von f_a folgern lässt. Begründen Sie Ihre Angabe ausgehend von I und II.

5 BE

Die Tangente t_f an den Graphen von f_a im Punkt $\left(\frac{5}{a} \middle| f_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ hat die Steigung $\frac{1}{a^2}$,
die Tangente t_g an den Graphen von g_a im Punkt $\left(\frac{5}{a} \middle| g_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ die Steigung $\frac{5-3a^2}{5a^2}$.
Der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten wird mit S bezeichnet.

d) Weisen Sie nach, dass S für jeden Wert von a auf der y-Achse liegt.

3 BE

e) Die Gerade mit der Gleichung $x = \frac{5}{a}$ schneidet t_f im Punkt F und t_G im Punkt G. Untersuchen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}^+$ das Dreieck SGF rechtwinklig ist.

6 BE

2 Die Abbildung 2 zeigt schematisch die Profillinie des Längsschnitts einer Skipiste in einer Skihalle. Die Piste ist in Querrichtung nicht geneigt und durchgehend 30 m breit.

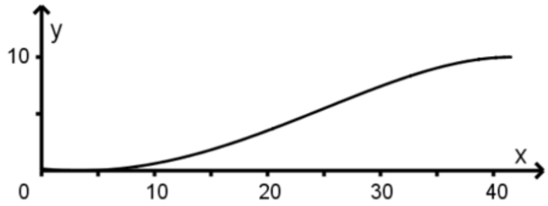


Abb. 2

Die Profillinie wird für $0 \leq x \leq 41{,}5$ modellhaft durch den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $p\colon x \mapsto -0{,}000004x^4 + 0{,}015x^2 - 0{,}1x + 0{,}1875$ dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 m in der Realität.

a) Berechnen Sie die Größe des größten Neigungswinkels der Piste gegenüber der Horizontalen.

4 BE

Über der Piste verläuft in deren Längsrichtung ein Seil. Die beiden Enden des Seils werden im Modell durch $A\,(5|2{,}31)$ und $B\,(37|10{,}68)$ dargestellt; der Verlauf des Seils kann mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h\colon x \mapsto b \cdot c^x$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

b) Bestimmen Sie die Werte von b und c.

(zur Kontrolle: $b \approx 1{,}818;\ c \approx 1{,}049$)

2 BE

c) Untersuchen Sie, in welchen Bereichen der vertikale Abstand des Seils zur Piste mindestens 3 m beträgt. Ermitteln Sie die Höhendifferenz, um die die beiden Enden des Seils gemeinsam mindestens angehoben werden müssten, damit das Seil an jeder Stelle von der Piste einen vertikalen Abstand von mindestens 3 m hat.

6 BE

d) Die Abbildung 3 zeigt grau markiert die Schneeauflage im unteren Bereich der Piste; dazu wurde die Abbildung 2 in Richtung der y-Achse stärker vergrößert als in Richtung der x-Achse. Der Untergrund, auf dem der Schnee aufgebracht ist, wird für $0 \leq x \leq 5$ durch die x-Achse dargestellt. Für den übrigen Teil der Piste soll davon ausgegangen werden, dass die in vertikaler Richtung gemessene Schneehöhe 60 cm beträgt.

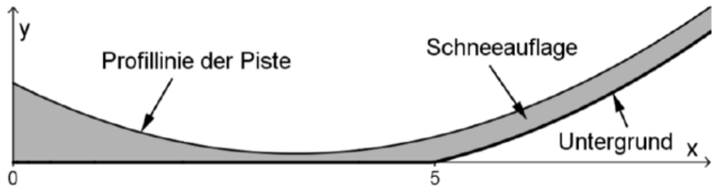


Abb. 3

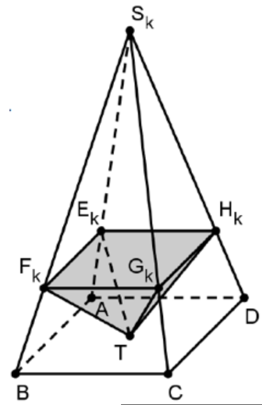
Bestimmen Sie das Volumen der Schneeauflage der gesamten Piste.

5 BE

Aufgabe B2 - Analytische Geometrie

1 Betrachtet werden die Pyramiden $ABCDS_k$ mit $A(0|0|0)$, $B(2|0|0)$, $C(2|2|0)$, $D(0|2|0)$ und $S_k(1|1|k)$ mit $k \in \,]1; +\infty[$. Die gemeinsame Grundfläche ABCD dieser Pyramiden ist quadratisch.

Die Abbildung zeigt beispielhaft eine dieser Pyramiden.



a) Begründen Sie, dass jede der Pyramiden $ABCDS_k$ gerade ist. Berechnen Sie den Inhalt der Mantelfläche der Pyramide $ABCDS_k$.

5 BE

b) Begründen Sie, dass die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ keine Symmetrieebene der Pyramide $ABCDS_k$ beschreibt. Geben Sie für eine Symmetrieebene der Pyramide $ABCDS_k$ eine Gleichung in Koordinatenform an.

3 BE

c) Die Seitenfläche ABS_k liegt in der Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $k \cdot x_2 - x_3 = 0$)

3 BE

d) Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Seitenfläche ABS_k gegenüber der Grundfläche ABCD um einen Winkel der Größe 60° geneigt ist.

3 BE

Der abgebildete Punkt T ist der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche ABCD.

e) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{TS_k}$ wird mit Q_k bezeichnet. Für einen Wert von k ist Q_k von der Grundfläche ABCD dreimal so weit entfernt wie von jeder der vier Seitenflächen der Pyramide $ABCDS_k$. Berechnen Sie diesen Wert von k.

4 BE

Die Ebene mit der Gleichung $x_3 = 1$ schneidet die vier vom Punkt S_k ausgehenden Kanten der Pyramide $ABCDS_k$ in den Punkten E_k, F_k, G_k und H_k (vgl. Abbildung).

f) Bestimmen Sie die x_1- und die x_2-Koordinate von F_k.

3 BE

g) Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die das Verhältnis des Volumens der Pyramide $E_kF_kG_kH_kT$ zum Volumen der Pyramide $ABCDS_k$ 1:8 beträgt.

4 BE

Aufgabe B3 - Stochastik

1 Betrachtet werden Bauteile der Kategorien A und B, die jeweils elektrische Widerstände enthalten. Es gilt:

- Ein Bauteil der Kategorie A ist funktionstüchtig, wenn alle enthaltenen Widerstände funktionstüchtig sind.
- Ein Bauteil der Kategorie B ist funktionstüchtig, wenn mindestens einer der enthaltenen Widerstände funktionstüchtig ist.

Zunächst soll davon ausgegangen werden, dass jeder Widerstand mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % funktionstüchtig ist.

a) Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagrammes oder einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E_1: „Ein Bauteil der Kategorie A, das zwei Widerstände enthält, ist funktionstüchtig."
E_2: „Ein Bauteil der Kategorie B, das zwei Widerstände enthält, ist funktionstüchtig."

6 BE

b) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Je mehr Widerstände ein Bauteil der Kategorie A enthält, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es funktionstüchtig ist.

3 BE

Bei veränderten Bedingungen ist für jeden Widerstand die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er funktionstüchtig ist, p.

c) Betrachtet wird ein Bauteil der Kategorie B, das zwei Widerstände enthält. Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Bauteil funktionstüchtig ist, durch den Term $2\mathrm{p} - \mathrm{p}^2$ angegeben wird.

2 BE

d) Betrachtet werden zehn Bauteile der Kategorie B, die jeweils zwei Widerstände enthalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Bauteile alle funktionstüchtig sind, beträgt 95 %. Bestimmen Sie den Wert von p.

3 BE

e) Betrachtet wird eine Kombination aus zwei Bestandteilen: einem einzelnen Widerstand und einem Bauteil der Kategorie A, das zwei Widerstände enthält. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kombination funktionstüchtig ist, wird durch den Term $1 - (1 - \mathrm{p}) \cdot (1 - \mathrm{p}^2)$ angegeben. Geben Sie die Abhängigkeit der Funktionstüchtigkeit dieser Kombination von der Funktionstüchtigkeit seiner beiden Bestandteile an. Begründen Sie Ihre Angabe.

3 BE

2 Einem Unternehmen wird eine sehr große Anzahl von Widerständen geliefert. Um den Anteil der funktionstüchtigen Widerstände zu schätzen, werden Stichproben entnommen.

a) In einer Stichprobe von 200 Widerständen sind 176 Widerstände funktionstüchtig. Berechnen Sie zu diesem Anteil das Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Konfidenzintervalls im Sachzusammenhang.

4 BE

b) Gegeben ist die folgende Näherungslösung einer Aufgabe im Sachzusammenhang:

$$2 \cdot 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \leq 0{,}05$$

$$\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \leq \sqrt{\frac{0{,}5^2}{n}} \text{ für alle } h \in [0; 1]$$

$$2 \cdot 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5^2}{n}} \leq 0{,}05 \text{ liefert } n \geq 1537$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und erläutern Sie die beiden ersten Zeilen des Lösungswegs.

4 BE