Mathematik (Gymnasium)

Hinweise und Beispiele zum Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife (2018)

Veränderungen im Lernbereich Stochastik

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Von Stichproben auf die Gesamtheit schließen

1.1.1 Ein Blick zum erhöhten Anforderungsniveau

1.1.2 Ein Blick zum grundlegenden Anforderungsniveau

1.2 Mögliche Stundenverteilung

1.3 Literaturempfehlungen

2 Kommentierte Handreichungen

2.1 Prognoseintervalle

2.2 Konfidenzintervalle

1 Einführung

Entsprechend der veränderten Thüringer Schulordnung für die Grundschule, die Regelschule, die Gemeinschaftsschule, das Gymnasium und die Gesamtschule[1] wurden Ziele des Kompetenzerwerbs im **grundlegenden Anforderungsniveau** für das Fach Mathematik formuliert, die ab dem Schuljahr 2019/20 für die Klassenstufe 11 Gültigkeit haben. Gleichzeitig wurden die Ziele des Kompetenzerwerbs für Mathematik im **erhöhten Anforderungsniveau** sowie für die Klassenstufe 10 angepasst und präzisiert. Der weiterentwickelte Lehrplan (2018) ist ab dem Schuljahr 2019/20 gültig. Die Veränderungen in der Klassenstufe 10, hauptsächlich in der Stochastik, bringen keinen Nachteil für die Schüler der 10. Klassenstufe im Schuljahr 2018/19.

Entsprechend der Bildungsstandards setzt Thüringen den Schwerpunkt auf die vektorielle Analytische Geometrie (A2) und nicht auf die Beschreibung mathematischer Prozesse durch Matrizen (A1). Somit sind die Ebenen für das erhöhte Anforderungsniveau verbindlich.
In den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife steht, dass die Bundesländer „den Schwerpunkt auf die Schätzung von Parametern (Alternative B1) oder auf die Testung von Hypothesen (Alternative B2) setzen“ können[2].
Im Gegensatz zur bisherigen Verfahrensweise soll am Thüringer Gymnasium ab dem Schuljahr 2019/20 (ab Klassenstufe 11) die Alternative B1 unterrichtet werden.
Das Testen von Hypothesen wird durch das Schätzen von Wahrscheinlichkeiten abgelöst. Damit wird der in den Bildungsstandards geforderte „Einblick in die Methoden der beurteilenden Statistik“ erfüllt.

Diese Handreichung wird im Kapitel 2 Hintergründe beleuchten, Querverbindungen aufzeigen und an ausgewählten Stellen Anregungen (durch kleine Experimente) für einen aktivierenden, handlungsorientierten, aber auch problemlösenden Unterricht geben.

Eine systematische Darstellung will und kann sie nicht ersetzen. Letztere finden sich - länderübergreifend - in ausgezeichneter Qualität in den Büchern und Begleitmaterialien aller Schulbuchverlage (siehe auch 1.3 Schulbuchliteraturempfehlungen).

[1] In: Gesetz- und Verordnungsblatt für den Freistaat Thüringen, Erfurt, 5. Juli 2018, Nr. 7: Verordnung zur Änderung der Thüringer Schulordnung, der Thüringer Schulordnung für das berufliche Gymnasium sowie der Thüringer Kollegordnung vom 23. Mai 2018.

[2] In: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der BRD (Hrsg.): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife - Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012, Wolters Kluwer, S. 18.

1.1 Von Stichproben auf die Gesamtheit schließen

Gründe für die Überarbeitung des Lehrplans im Lernbereich Stochastik - Ein Blick zu den Gedanken der Lehrplankommission

1.1.1 Im erhöhten Anforderungsniveau

Hintergrund

In der schließenden Statistik versucht man, aus beobachteten relativen Häufigkeiten (aus der Realitätsebene) Rückschlüsse auf zugrunde liegende Wahrscheinlichkeiten (auf die Hypothesen in der Modellebene) zu ziehen. Man nennt das den Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit.

Wenn man inhaltlich fundierte Vorstellungen zu diesen Wahrscheinlichkeiten besitzt, kann man sie mithilfe von **Signifikanztests** auf bestimmten Signifikanzniveaus testen. Die Interpretation der Ergebnisse solcher Signifikanztests ist jedoch schwierig, weil sie z. B. erheblich vom Stichprobenumfang abhängt. So kann man bei sehr großem Stichprobenumfang jede (auch in der Praxis brauchbare) Hypothese verwerfen, denn Modelle (Wahrscheinlichkeiten) beschreiben die Realität stets nur näherungsweise, nie ganz genau. So werden irrelevante Unterschiede schnell signifikant.

Bei einseitigen Signifikanztests werden in der Regel Interessenlagen unterstellt, die für Lernende mitunter nur schwer zu entschlüsseln sind. Die Frage, was die Nullhypothese und was die Alternative ist, lässt sich oft nicht eindeutig beantworten.

Es hat sich *(bundesweit)* gezeigt, dass beim Fördern von Grundvorstellungen zu beurteilender Statistik (nicht nur im Schulunterricht) das **Schätzen** von Wahrscheinlichkeiten über Konfidenzintervalle sehr viel natürlicher ist und die Idee des Messens, das immer mit Ungenauigkeiten behaftet ist, aus der Geometrie in die Stochastik überträgt.

Man braucht keine Hypothesen mehr „aus dem Hut zu zaubern“, wie das in Aufgaben bisher häufig geschah, sondern sammelt alle Wahrscheinlichkeiten, die zu der beobachteten relativen Häufigkeit passen, im Konfidenzintervall. Die aus der Sekundarstufe I vertraute Punktschätzung von Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten wird durch die Intervallschätzung fortgesetzt und erweitert.

Die Auswirkung des Stichprobenumfangs ist hier - anders als beim Hypothesentest - sofort an der Länge des Konfidenzintervalls abzulesen. Eine Vervierfachung des Versuchsumfangs verdoppelt die Genauigkeit. Da das Schätzen nicht nur lernpsychologisch enorme Vorteile bietet, sondern auch in der Forschungspraxis dem Testen von Hypothesen vorgezogen wird [Vortrag Prof. Dr. Thomas Hotz, ThILLM 29.09.18], soll Thüringer Schülerinnen und Schülern dieser natürlichere und leichter verständliche Zugang zur beurteilenden Statistik nicht mehr vorenthalten werden.

Prinzipieller Unterrichtsgang

a) Im Unterricht untersucht man bei **exakt vorgegebenen** Wahrscheinlichkeiten mit den Sigmaregeln der Binomialverteilung Zufallsschwankungen über Prognoseintervalle für absolute und anschließend für relative Häufigkeiten (1/Wurzel(n)-Gesetz).

b) Wenn beobachtete relative Häufigkeiten außerhalb der **Prognoseintervalle** liegen, spricht man von **signifikanten Abweichungen**. Diese geben (insbesondere, wenn man sich bei den Wahrscheinlichkeiten **nicht ganz sicher** ist) Anlass die angenommenen Wahrscheinlichkeiten zu **bezweifeln**.

c) Wenn man im erhöhten Anforderungsniveau systematisch **alle** diejenigen Wahrscheinlichkeiten sucht, die nach Beobachtung der relativen Häufigkeit **nicht zu bezweifeln** sind, entsteht das **Konfidenzintervall**, dessen Länge sich mit wachsendem Versuchsumfang verringert. Die Länge des Konfidenzintervalls deutet man als Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung.

d) Die Frage nach dem für eine gewünschte Genauigkeit erforderlichen Stichprobenumfang kann den Unterrichtsgang im erhöhten Anforderungsniveau abrunden.

e) Wenn man im erhöhten Anforderungsniveau später die Normalverteilung thematisiert, ist es (im Sinne vertikaler Vernetzung) sinnvoll, nochmals auf die Sigmaregeln der Binomialverteilung zurückzublicken.
(Bei der Normalverteilung gelten die Sigmaregeln exakt – und die Normalverteilung ist i. d. R. eine brauchbare Näherung der Binomialverteilung.)

1.1.2 Im grundlegenden Anforderungsniveau

Der Unterrichtsgang im grundlegenden Anforderungsniveau unterscheidet sich bei den Themen a) und b) zunächst nicht prinzipiell vom Unterrichtsgang im erhöhten Anforderungsniveau. Auf c), d) und e) kann hier jedoch verzichtet werden, da mit der Idee des Bezweifelns von Wahrscheinlichkeiten in Folge signifikanter Abweichungen gemäß b) über Prognoseintervalle der in den Bildungsstandards geforderte Rückschluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit gesichert ist[3].

Sowohl im grundlegenden als auch im erhöhten Anforderungsniveau wird sich im Lehrplan bei den Prognoseintervallen auf die 2σ-Regel (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %) beschränkt, weil dabei im Sinne einer nachhaltigen Sicherung von Grundvorstellungen alles Wesentliche hervortritt.
Aus dem gleichen Grund reicht im erhöhten Anforderungsniveau das Arbeiten auf dem 95 %-Konfidenzniveau. Die (im Vergleich zu anderen Bundesländern) damit eingesparte Unterrichtszeit sollte man zur inhaltlichen Interpretation von Prognose- bzw. Konfidenzintervallen nutzen.

[3] Vgl.: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der BRD (Hrsg.): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife - Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012, Wolters Kluwer, S. 21.

1.2 Mögliche Stundenverteilung

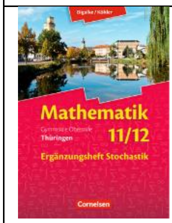
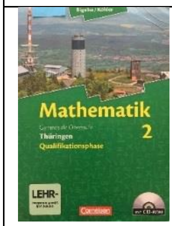
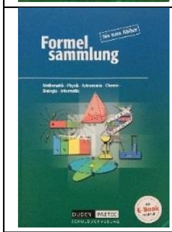
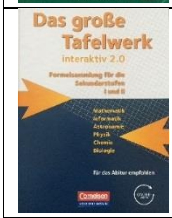
Die von der Lehrplangruppe erarbeitete grobe Stundenverteilung ist lediglich als Vorschlag anzusehen. Sie dient zur Unterstützung der Unterrichtsplanung. In der schulinternen Lehr- und Lernplanung können selbstverständlich Änderungen in der Reihenfolge und im Umfang vorgenommen werden.
In Klassenstufe 11 werden etwa 30 Schulwochen, in Klassenstufe 12 etwa 20 Schulwochen eingeplant.

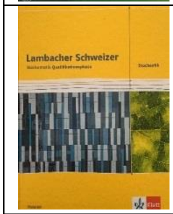
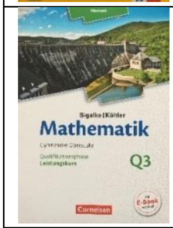
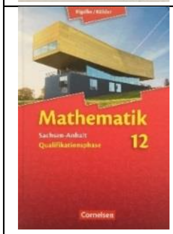
Grundlegendes Anforderungsniveau		
	Inhalt	Dauer in Wochen
A1	Funktionen – bekannte und neue Eigenschaften	ca. 2
A2	Differenzialrechnung	ca. 13
A3	Integralrechnung	ca. 6
S1	Binomialverteilung, Prognoseintervall	ca. 7
G1	Vektoren	ca. 8
G2	Geraden	ca. 5
A4	Exponentialfunktionen	ca. 7
	Komplexe Aufgaben	ca. 2

Erhöhtes Anforderungsniveau		
	Inhalt	Dauer in Wochen
A1	Funktionen – bekannte und neue Eigenschaften	ca. 3
A2	Differenzialrechnung	ca. 10
A3	Integralrechnung	ca. 5
S1	Binomialverteilung, Prognoseintervall, Konfidenzintervall	ca. 5
G1	Vektoren	ca. 6
G2	Geraden	ca. 4
G3	Ebenen	ca. 4
A4	weitere Funktionsklassen	ca. 5
S2	Normalverteilung	ca. 3
	Komplexe Aufgaben	ca. 5

1.3 Literaturempfehlungen

Da in den meisten aktuellen Lehrbüchern für Thüringen noch kein Kapitel zu Prognose- und Konfidenzintervallen enthalten ist, wird an dieser Stelle auf folgende Lehrbücher u. ä. verwiesen:

Für Thüringen NEU:	
	Zum Download (2019): https://www.westermann.de/anlage/4610358/Material-zur-Stochastik-Thueringen-2019-Binomialverteilung-Prognoseintervalle-Konfidenzintervalle?pk_campaign=Mailing&pk_kwd=E19645
	Lambacher Schweizer Mathematik, Prognose- und Konfidenzintervalle, Thüringen, Klett, W700708 Zum Download unter https://www.klett.de/lehrwerk/lambacher-schweizer-mathematik-ausgabe-ab-2000/einstieg/bundesland-16/schulart-5/fach-48
	Bigalke/Köhler: Mathematik Thüringen - Ausgabe 2015 · 11./12. Schuljahr Ergänzungsheft zum Schülerbuch https://www.cornelsen.de/produkte/bigalke-koehler-mathematik-ergaenzungsheft-zum-schuelerbuch-11-12-schuljahr-9783060059317
In Thüringen bekannt:	
	Bigalke, Anton Dr.; Köhler, Norbert Dr. (Hrsg.) (2013): Mathematik. Gymnasiale Oberstufe. Thüringen. Qualifikationsphase. Teil 2. Cornelsen Verlag GmbH, Berlin.
	Formelsammlung Duden Paetec (2018), Cornelsen Verlag GmbH, Berlin.
	Das große Tafelwerk interaktiv 2.0, Cornelsen Verlag, Berlin.

Blick in andere Bundesländer:	
	Lergenmüller, Arno; Schmidt, Günter Prof.; Krüger, Katja Prof. Dr.; (Hg.) (2012): Mathematik Neue Wege. Stochastik. Arbeitsbuch für Gymnasien. Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig.
	Lambacher-Schweizer. Mathematik Qualifikationsphase. Stochastik. Hessen (2018), Ernst Klett Verlag, Stuttgart, Leipzig.
	Bigalke, Anton Dr.; Köhler, Norbert Dr. (Hg) (2018): Mathematik. Gymnasiale Oberstufe. Qualifikationsphase. Leistungskurs (Hessen), Cornelsen Verlag GmbH, Berlin.
	Bigalke, Anton Dr.; Köhler, Norbert Dr. (Hg) (2017): Mathematik. Sachsen-Anhalt. Qualifikationsphase 12, Cornelsen Verlag GmbH, Berlin.
Materialdatenbank von Texas Instruments	http://www.ti-unterrichtsmaterialien.net/nc/materialien/ z. B. Konfidenzintervalle: Konfidenzintervalle mit dem TI-Nspire CAS http://www.ti-unterrichtsmaterialien.net/nc/materialien/?resource_id=1308 Dynamische Entwicklung von Konfidenzintervallen http://www.ti-unterrichtsmaterialien.net/nc/materialien/?resource_id=1247
Materialdatenbank von CASIO	https://www.casio-schulrechner.de/de/lehrerschule/materialdatenbank/?q=stoppel Printversion: Stoppel, Hannes; Statistik und Stochastik mit dem ClassPadII ISBN: 978-3-941321-38-0 https://www.casio-schulrechner.at/at/lehrerschule/materialdatenbank/?q=&ml%5B%5D=87
Weitere Tipps:	
Homepage von Günter Roolfs	Link zum Stochastikkapitel: http://groolfs.de/#kapitel9

2 Kommentierte Handreichungen

<table>
<tr><td>Die Handreichungen enthalten folgende Themenschwerpunkte:</td><td>Handreichung</td></tr>
<tr><td>- Prognoseintervalle
Mit Prognoseintervallen (dem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ Gesetz für relative Häufigkeiten) schließt man
• von einer bekannten Wahrscheinlichkeit auf die zu erwartende relative Häufigkeit,
• von einer Grundgesamtheit auf eine Stichprobe,
• von einem Modell auf die Realität.
Sie sagen bei bekannter Wahrscheinlichkeit p voraus, in welchem Intervall die relative Häufigkeit mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 95 % zu erwarten ist. Da die Wahrscheinlichkeit bekannt ist, sind Prognoseintervalle fest, d. h. nicht zufallsabhängig.

Anmerkung:
Die Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten und deren $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n ergeben sich aus den Sigmaregeln der Binomialverteilung.</td><td rowspan="2">2.1 Prognoseintervalle</td></tr>
<tr><td>- Konzept des Bezweifelns
Wenn man sich bei den (angenommenen/hypothetischen) Wahrscheinlichkeiten nicht so sicher ist wie etwa beim Werfen einer normalen Münze, nutzt man Prognoseintervalle auch, um von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit zurückzuschließen:
Wenn eine beobachtete relative Häufigkeit außerhalb des Prognoseintervalls liegt, dann bezweifelt man die Wahrscheinlichkeitsannahme (genauer: dass die Annahme ein gutes Modell der Realität ist).

Damit sind für Schüler*innen die in den Bildungsstandards festgelegten Anforderungen zu den Grundvorstellungen beurteilender (schließender) Statistik erfüllt.</td></tr>
<tr><td>- Konfidenzintervalle
Wie eingangs erwähnt, sammelt man im Konfidenzintervall nach einer Beobachtung alle diejenigen Wahrscheinlichkeiten, die mit der Beobachtung verträglich sind, also alle diejenigen Wahrscheinlichkeiten, in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit liegt. Man schließt mit ihnen
• von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit bzw.
• von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit bzw.
• von der Realität auf das Modell.</td><td>2.2 Konfidenzintervalle</td></tr>
</table>

Konfidenzintervalle sind zufallsabhängig. Sie haben aber definitionsgemäß die einprägsame Eigenschaft, dass sie die unbekannte Wahrscheinlichkeit p mit 95%iger Sicherheit überdecken.	