Mathematik (Gymnasium)

Handreichung zum Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife (2018) - Prognoseintervalle

1 Das fachlich Wesentliche (nach Dr. Wolfgang Riemer)

Aus der Sekundarstufe I wissen Schülerinnen und Schüler:
- Wahrscheinlichkeiten p sagen relative Häufigkeiten h voraus,
- relative Häufigkeiten h schwanken zufallsabhängig um Wahrscheinlichkeiten p,
- relative Häufigkeiten können bei großer Anzahl von Versuchsdurchführungen zur Punktschätzung einer Wahrscheinlichkeit verwendet werden.

In der Sekundarstufe II knüpft man an diese Grundvorstellungen an. Sie werden dadurch erweitert, dass man nun auch die Größe der Zufallsschwankungen quantifiziert. Es folgt aus der 2σ-Regel näherungsweise die Beziehung

$$P\left(p - 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}} \leq h \leq p + 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}95 \qquad (1)$$

Man kann also vor der Durchführung eines Bernoulliversuchs vorhersagen, dass bei einer bekannten oder als wahr angenommenen Wahrscheinlichkeit p die relative Häufigkeit des beobachteten Merkmals in einer Stichprobe vom Umfang n mit großer (etwa 95 %) Wahrscheinlichkeit im Prognoseintervall

$$\left[p - 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \qquad (2)$$ liegen wird.

Die Länge dieses Intervalls ist $d(n) = 4 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$. Weil d(n) mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$ schrumpft, spricht man auch vom $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz. (Wenn man den Versuchsumfang vervierfacht, halbiert sich die typische Größe der Zufallsschwankungen.) Dieser Zusammenhang wird noch deutlicher, wenn man das Intervall (2) nach oben abschätzt. Die quadratische Funktion $f(p) = p \cdot (1-p)$ nimmt ihren größten Wert für p = 0,5 an. Ersetzt man in (2) p durch 0,5, dann ergibt sich für das 95 %-Prognoseintervall eine Abschätzung durch

$$[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}] \qquad (3).$$

1.1 Visualisierungen mit „Trichtern" und „Ellipsen"

Zur Visualisierung der Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten nutzt man
- „Wurzeltrichterdiagramme", wenn bei festem p der Versuchsumgang n variiert,
- „Ellipsendiagramme", wenn bei festem n die Wahrscheinlichkeit p variiert.

Die Interpretation der Diagramme und der Wechsel zwischen beiden Darstellungen fördert die Entwicklung der allgemeinen mathematischen Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden" (K4).
Im erhöhten Anforderungsniveau erleichtern Ellipsendiagramme den Einstieg in die Thematik der Konfidenzintervalle ungemein.
(Vgl. die entsprechende Handreichung zu Konfidenzintervallen).

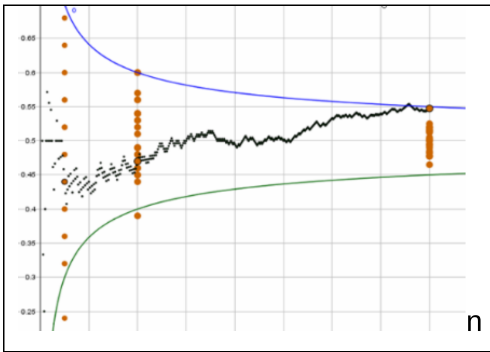
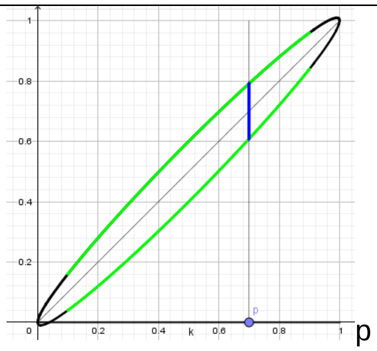
	
Wurzeltrichterdiagramm Prognoseintervalle in Abhängigkeit vom Versuchsumfang n bei fester Wahrscheinlichkeit p (hier p = 0,5)	**Ellipsendiagramm** Prognoseintervalle in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit p bei festem Versuchsumfang n (hier n = 100)

Abbildung 1

1.2 Signifikante Abweichungen und das Konzept des Bezweifelns

Wenn man in einem Experiment oder in einer Datenerhebung eine relative Häufigkeit h beobachtet, die nicht im Prognoseintervall einer (angenommenen) Wahrscheinlichkeit p liegt, nennt man die Abweichung der relativen Häufigkeit h von der Wahrscheinlichkeit p signifikant. Man sagt: „Die relative Häufigkeit gibt Anlass, an der Wahrscheinlichkeit zu zweifeln“ oder „die Wahrscheinlichkeitsannahme scheidet vermutlich aus“. Andernfalls bezeichnen Statistiker die Wahrscheinlichkeitsannahme als „verträglich“ mit der Beobachtung.
Mit dem Bezweifeln einer angenommenen Wahrscheinlichkeit infolge einer signifikanten Abweichung erfüllt man im grundlegenden Anforderungsniveau die Bildungsstandards bezüglich des Schließens von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit.
Da (angenommene) Wahrscheinlichkeiten als Modelle die Realität nie genau, sondern nur mehr oder weniger gut beschreiben, wird es immer mehrere Wahrscheinlichkeiten geben, die mit einer Beobachtung verträglich sind, also nicht angezweifelt werden müssen. Die Sicherung dieser Erkenntnis und auch das Studium, welchen Einfluss der Stichprobenumfang dabei hat, ist ein lohnender Abschluss der beurteilenden Statistik auf grundlegendem Anforderungsniveau.
Wenn man die Untersuchung im Kontext „Meinungsumfragen“ und „verschweigen verwendeter Stichprobengrößen“ durchführt, gewinnt die Thematik allgemeinbildenden Tiefgang im Sinne der ersten Winter‘schen Grunderfahrung:

> *„Der Mathematikunterricht sollte anstreben … Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen, ...“*[1]

Eine systematische Untersuchung aller mit einer Beobachtung verträglichen Wahrscheinlichkeiten, ein Sammeln im Konfidenzintervall - und das gedankliche Durchdringen der Dualität zwischen Prognose- und Konfidenzintervallen bleibt dem erhöhten Anforderungsniveau vorenthalten. (Vgl. hierzu die separate Handreichung.)

---

[1] Heinrich Winter: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61, 37-46. 1996 (siehe auch Thüringer Lehrplan Mathematik (2018) S. 5.)

1.3 Eine mögliche unterrichtliche Vorgehensweise[2] im Überblick

Klassisch geht man in vielen Schulbüchern folgendermaßen vor und auch in der vorliegenden Handreichung wird dieser Zugang verfolgt:

- Man nutzt die Vorkenntnisse über die Binomialverteilung ($\mu = n \cdot p;\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$), bestätigt die Sigma-Regeln rechnerisch (evtl. auch durch Simulationen) und erhält damit Prognoseintervalle für die absolute Häufigkeit X.
  Es gilt mit Wahrscheinlichkeit von ungefähr 95 %:
  $X \epsilon [np - 2\sqrt{np(1-p)}; np + 2\sqrt{np(1-p)}]$ (Weil die Länge dieses Intervalls proportional zu $\sqrt{n}$ wächst, spricht man vom $\sqrt{n}$-Gesetz.)
- Aus den Prognoseintervallen für die absoluten Häufigkeiten erhält man dann die Prognoseintervalle (2) für relative Häufigkeiten mittels Division durch n.

Die in Thüringen vorhandene Verfügbarkeit von CAS-Rechnern bietet sehr gute Möglichkeiten, notwendige Berechnungen zu vereinfachen und inspirierende Simulationen durchzuführen.

2 Sigma-Regeln

Die Sigma-Regeln beschreiben Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Trefferanzahl bei einer Bernoulli-Kette der Länge n bestimmte Abweichungen vom Erwartungswert nicht überschreitet.

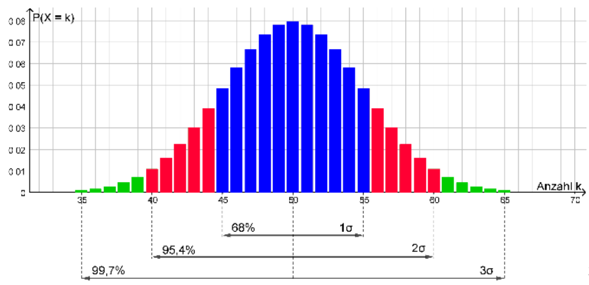
Sigma-Regeln

Ist X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p, so gilt für $P(\mu - c \cdot \sigma \leq X \leq \mu + c \cdot \sigma) = \beta$ näherungsweise:

c	β	c	β
1	0,683	1,64	0,90
2	0,954	1,96	0,95
3	0,997	2,58	0,99

β: „Sicherheitswahrscheinlichkeit“

Bsp.: n = 100; p = 0,5; $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5$



[3]

untere Intervallgrenze $g_u = \mu - c \cdot \sigma$
obere Intervallgrenze $g_o = \mu + c \cdot \sigma$

Abbildung 2

[2] Weil die Beziehung (2) so eingängig und gleichzeitig für die „beurteilende Statistik“ so fundamental ist, ist es vertretbar, sie mithilfe von Simulationen als Naturgesetz ganz an den Anfang eines Stochastikkurses zu stellen und erst danach theoretisch zu „unterfüttern“. Vgl. beispielsweise „Das 'Eins durch Wurzel aus n'- Gesetz.- Einführung in statistisches Denken auf der Sekundarstufe I“ von Dr. Wolfgang Riemer in „Stochastik in der Schule“, 11 (1991), S. 24-36.

[3] Nach: https://lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/fb2/modul4/2_higru/8_stetige/binomialverteilung_1.pdf (18.02.2019)

Im Unterricht auf grundlegendem und erhöhtem Anforderungsniveau lassen sich die Sigma-Regeln durch persönlich durchgeführte Beispielrechnungen erfahrbar machen[4].
Die Aufgabenstellung könnte lauten:
Betrachten Sie für binomialverteilte Zufallsgrößen $X \sim B_{n;p}$ die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Werte in der 2σ-Umgebung des Erwartungswertes μ liegen: $\mathrm{P}(\mu - 2 \cdot \sigma \leq \mathrm{X} \leq \mu + 2 \cdot \sigma)$.

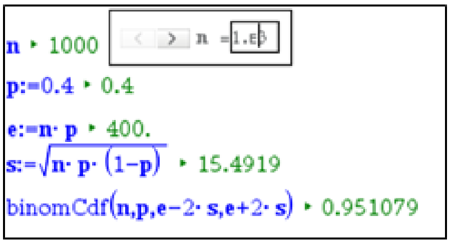


Abbildung 3:
01_Sigma-Regeln.tns

Notieren Sie die Ergebnisse in der Tabelle (Ergebnisse hier hellgrau gedruckt).

p	n	1000	2000	3000	4000	5000
0,4	$\mathrm{P}(\mu - 2 \cdot \sigma \leq \mathrm{X} \leq \mu + 2 \cdot \sigma)$	0,951	0,953	0,954	0,953	0,955
0,5	$\mathrm{P}(\mu - 2 \cdot \sigma \leq \mathrm{X} \leq \mu + 2 \cdot \sigma)$	0,954	0,953	0,953	0,955	0,954
0,8	$\mathrm{P}(\mu - 2 \cdot \sigma \leq \mathrm{X} \leq \mu + 2 \cdot \sigma)$	0,956	0,953	0,953	0,954	0,954

Analog oder durch Simulation (vgl. Anmerkung auf S. 6) lassen sich für andere Sigma-Umgebungen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten erkunden. Ein arbeitsteiliges Vorgehen bietet sich hier an. Die Ergebnisse werden zusammenfassend übersichtlich, wie in der obigen Tabelle, dargestellt.
Sowohl im grundlegenden als auch im erhöhten Anforderungsniveau wird sich im Lehrplan bei den Prognose- und Konfidenzintervallen auf die 2σ-Regel mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von rund 95 % beschränkt, weil dabei im Sinne einer nachhaltigen Sicherung von Grundvorstellungen alles Wesentliche hervortritt.
Sie sollte zum unverzichtbaren „Kopfwissen“ werden:

In der 2σ-Umgebung des Erwartungswertes liegen ca. 95 % der Werte einer binomialverteilten Zufallsgröße.

[4] Eine theoretische Fundierung kann im erhöhten Anforderungsniveau im Zusammenhang mit der Normalverteilung erfolgen.

3 Prognoseintervalle für absolute Häufigkeiten

Einstiegsbeispiel[5]: Für das Jahr 2018 wurde vom Kraftfahrt-Bundesamt für die Automarke „Opel“ ein Anteil von 9,8 % an den in Deutschland zugelassenen PKW bekanntgegeben. In welchem Intervall wird die Anzahl der PKW der Marke „Opel“ in einer repräsentativen Stichprobe von 350 zufällig ausgewählten PKW liegen, wenn man von einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % ausgeht?

Lösung: Mit $[\mathrm{np}-2\sqrt{\mathrm{np}(1-\mathrm{p})}; \mathrm{np}+2\sqrt{\mathrm{np}(1-\mathrm{p})}]$ ergibt sich wegen n = 350 und p = 0,098 das Intervall [23,1755; 45,4245].
Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 95 % werden unter den 350 PKW mindestens 24 und höchstens 45 PKW der Marke „Opel“ sein.

$\mathbf{n:=350} \blacktriangleright 350 \quad \mathbf{p:=0.098} \blacktriangleright 0.098$

$\mathbf{ew:=n \cdot p} \blacktriangleright 34.3 \quad \mathbf{sa:=\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \blacktriangleright 5.56225$

$\mathbf{gu:=ew-2 \cdot sa} \blacktriangleright 23.1755$

$\mathbf{go:=ew+2 \cdot sa} \blacktriangleright 45.4245$

Abbildung 4:
02_Prognoseintervalle_abs_H.tns

Hinweis: Obwohl es sich strenggenommen bei einer solchen Stichprobe um „Ziehen ohne Zurücklegen“ handelt, kann näherungsweise das Modell der Binomialverteilung Anwendung finden, weil der Umfang der Stichprobe sehr klein gegenüber der Anzahl der in Deutschland zugelassenen PKW ist.
(Am 1. Januar 2018 waren 46 474 594 PKW in Deutschland zugelassen.)

Mit dem folgenden Beispiel, bei dem das Modell der Binomialverteilung zweifelsfrei angewendet werden kann, lässt sich die Vorgehensweise in einer **Handlungsanweisung** für die Ermittlung von 95 %-Prognoseintervallen für absolute Häufigkeiten beschreiben.

Zufallsversuch: Anzahl der Sechsen für 120 Würfe mit einem Spielwürfel	
Liegt eine binomialverteilte Zufallsgröße vor?	Ja; n = 120; $\mathrm{p}=\frac{1}{6}$
$\mu = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p}$ und $\sigma = \sqrt{\mathrm{n} \cdot \mathrm{p} \cdot (1-\mathrm{p})}$ bestimmen.	$\mu = 120 \cdot \frac{1}{6}$; $\sigma = \sqrt{120 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 4{,}1$
Untere Grenze: $\mu - 2\sigma$ Obere Grenze: $\mu + 2\sigma$	$20 - 2 \cdot 4{,}1 = 11{,}8$ $20 + 2 \cdot 4{,}1 = 28{,}2$
Prognoseintervall unter Beachtung der Ganzzahligkeit der Grenzen angeben	[12; 28]
Probe durchführen, um die Qualität der Näherung zu beurteilen (ca. 95 %)	$\mathrm{binomCdf}\left(120,\frac{1}{6},12,28\right) \quad 0.963725$

Liegt das Stichprobenergebnis nicht im 95 %-Prognoseintervall, dann spricht man von einer „signifikanten Abweichung“ und hat Grund dazu, die angegebene Wahrscheinlichkeit p für die Gesamtheit zu bezweifeln. Anderenfalls nennt man das Stichprobenergebnis „verträglich mit der Annahme für p“.

[5] https://www.kba.de/SharedDocs/Publikationen/DE/Statistik/Fahrzeuge/FZ/2018/fz17_2018_pdf.pdf?__blob=publicationFile&v=3

Alternative zum Einstiegsbeispiel:

Der Kurs wird in Zweiergruppen aufgeteilt. Jede Gruppe verwendet einen Knopf sowie einen Becher zum Würfeln mit folgendem Auftrag:
Untersuchen Sie mithilfe der 2σ-Regel, ob für Ihren Knopf die Vermutung, dass die gewölbte Seite mit p = 0,5 oben liegt, bezweifelt werden kann. Ermitteln Sie dazu die Ergebnisse für „die gewölbte Seite liegt oben“ beim „Würfeln“ in Stichproben vom Umfang n = 25 und n = 100 Würfen.

Auswertung:
Die Schülergruppen ermitteln die Prognoseintervalle für
- 25 Würfe : [8; 17] bzw.
- 100 Würfe: [40; 60]

und entscheiden, ob sie für ihren Knopf die Wahrscheinlichkeit p = 0,5 bezweifeln können, je nachdem, ob ihre Versuchsergebnisse in diesen Prognoseintervallen liegen oder nicht.

Vertiefung durch eine Simulation:

Durch eine einfache Simulation wird der Frage nachgegangen, was eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % bedeutet, wenn man den 50fachen Münzwurf 100mal durchführt:
Bei 100 Durchführungen kann auf Grund der 2σ-Regel erwartet werden, dass
im Schnitt 95 von 100 (= 95 %) Ergebnisse im 95 %-Prognoseintervall liegen.

Hinweise zur Simulation mit TI-Nspire:

Mit dem Befehl *randbin(n, p, m)* werden m binomialverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern n und p erzeugt.
Die Anweisung $countif(liste, u \leq ? \leq o)$ gibt die Anzahl der Elemente von *liste* zurück, die im Intervall [u; o] liegen.

randBin(50,0.5,100) {26,23,27,28,24,28,25,21,27,29,20,24,26,27▸	
countIf(randBin(50,0.5,100),18≤?≤32)	99
countIf(randBin(50,0.5,100),18≤?≤32)	97
countIf(randBin(50,0.5,100),18≤?≤32)	96
countIf(randBin(50,0.5,100),18≤?≤32)	95

Abbildung 5

Oder - vielleicht noch anschaulicher - mit einer Tabellenkalkulation:

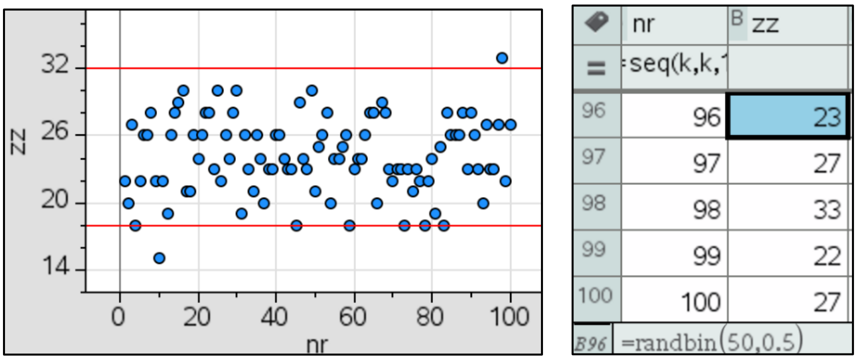


Abbildung 6: 03_Simulation_Popnoseintervalle.tns

In der Spalte A sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 eingetragen.
In der Zelle B1 wird der Befehl $= randbin(50{,}0.5)$ eingetragen und bis in die Zeile 100 kopiert. Beide Spalten erhalten eine Variablenzuweisung nr bzw. zz (ganz oben im ersten Feld der Spalte). Mit der Anwendung *Lists&Spreadsheet* werden die Datenpaare (nr; zz) grafisch dargestellt. Die untere und die obere Grenze des 95 %-Prognoseintervalls werden als Graphen konstanter Funktionen eingezeichnet, so dass man sofort sieht, ob und ggf. wie viele der absoluten Häufigkeiten außerhalb der 2σ-Umgebung liegen. In der Tabelle können mit <ctrl><R> beliebig oft die Simulationen wiederholt werden.
Man sieht: Es liegen fast immer einige der Zufallszahlen außerhalb des Prognoseintervalls.

Anmerkung:
Es ist auch denkbar, diese Simulation ganz an den Anfang in Verbindung mit der Untersuchung der Sigma-Regeln zu stellen, um damit z. B. die 2σ-Regel zu veranschaulichen.
Dabei können zentrale Simulationen vom Lehrer vorgeführt und inhaltlich im Unterrichtsgespräch interpretiert u. U. sinnstiftender sein als "Mäusekino" auf 30 Schülerrechnern gleichzeitig.

4 Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten:

Die Schülerinnen und Schüler kennen die Begriffe „relative Häufigkeit“ und „Wahrscheinlichkeit“ sowie einfache Zusammenhänge zwischen ihnen bereits aus der Sekundarstufe I (siehe Seite 1). Diese Zusammenhänge sollen nun vertieft werden.

Einstiegsbeispiel: In einer Urne liegen zwei grüne und eine rote Kugel. Es soll 600mal zufällig und mit Zurücklegen eine Kugel gezogen und deren Farbe festgestellt werden.
Untersuchen Sie mithilfe der 2σ-Regel, in welchen Intervallen die absolute und die relative Häufigkeit für das Ziehen einer roten Kugel liegen werden.

Lösung (können die Schüler i. A. selbst finden):
Mit $[np-2\sqrt{np(1-p)}; np+2\sqrt{np(1-p)}]$ ergibt sich wegen n = 600 und $p=\frac{1}{3}$ das 95 %-Prognoseintervall [177; 223] für die absoluten Häufigkeiten. Um daraus auf die relativen Häufigkeiten zu schließen, werden die Intervallgrenzen durch n = 600 dividiert. Man erhält das 95 %-Prognoseintervall [0,295; 0,372] für die relativen Häufigkeiten.

Herleitung des Intervalls (2) von Seite 1 als Aufgabenstellung:
Beschreiben Sie, durch welche Umformungen Sie von der allgemeinen Darstellung des 95 %-Prognoseintervalls für absolute Häufigkeiten $[np-2\sqrt{np(1-p)}; np+2\sqrt{np(1-p)}]$ auf die für das 95 %-Prognoseintervall für relative Häufigkeiten $\left[p-2\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}; p+2\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ schließen können.

Lösung: Division der Intervallgrenzen durch n und vereinfachen der Terme.

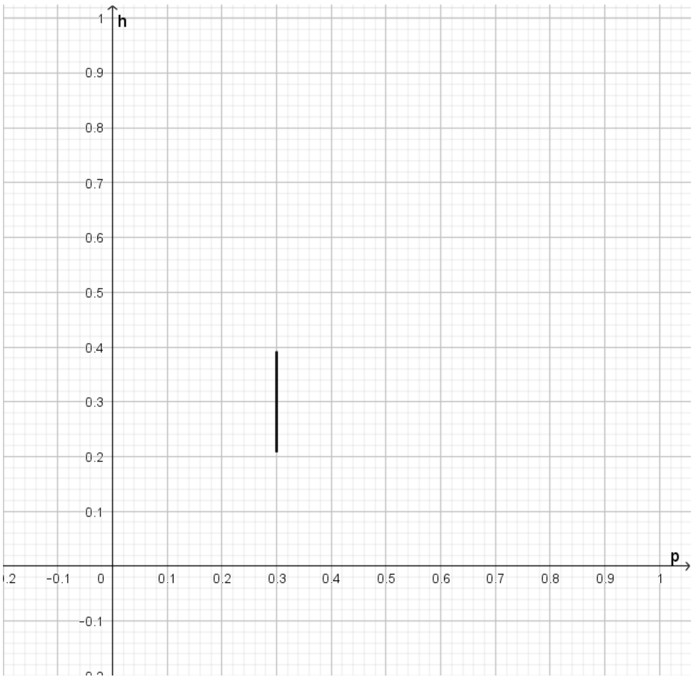
Handlungsanweisung - Ermitteln eines 95 %-Prognoseintervalls für relative Häufigkeiten

Zufallsversuch: Anzahl der Sechsen für 120 Würfe mit einem Spielwürfel	
Liegt eine binomialverteilte Zufallsgröße vor?	Ja; n = 120; $p=\frac{1}{6}$
Untere Grenze: $p-2\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}$ Obere Grenze: $p+2\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{6}-2\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}{\sqrt{120}}\approx 0{,}099$ $\frac{1}{6}+2\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}{\sqrt{120}}=0{,}235$
Prognoseintervall für die relativen Häufigkeiten	[0,099; 0,235]
Probe durchführen	$\mathrm{binomCdf}\left(120,\frac{1}{6},0.099\cdot 120,0.235\cdot 120\right)$ 0.963725

5 Visualisierung der Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten durch „Ellipsendiagramme“

Einstiegsaufgabe:
Im Diagramm ist das 95 %-Prognoseintervall für p = 0,3 und n = 100 grafisch dargestellt. Prüfen Sie, ob die Darstellung korrekt ist, und ergänzen Sie die fehlenden Darstellungen für 95 %-Prognoseintervalle mit n = 100 und $p = k \cdot 0{,}1\ (0 \leq k \leq 10)$.
Tipp: Verwenden Sie ggf. eine Tabellenkalkulation zum effektiven Arbeiten oder gehen Sie arbeitsteilig vor.

Wahrscheinlichkeit p	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
untere Grenze für h											
obere Grenze für h											



Lösung mit TI-Nspire:

	A	B p	C gu	D go
=				
1	100	0	0	0
2		0.1	0.04	0.16
3		0.2	0.12	0.28
4		0.3	0.208348	0.391652
5		0.4	0.30202	0.49798
6		0.5	0.4	0.6
7		0.6	0.50202	0.69798
8		0.7	0.608348	0.791652
9		0.8	0.72	0.88
10		0.9	0.84	0.96
11		1.	1.	1.

C1 $= b1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{\$a\$1 \cdot b1 \cdot (1-b1)}}{\$a\$1}$

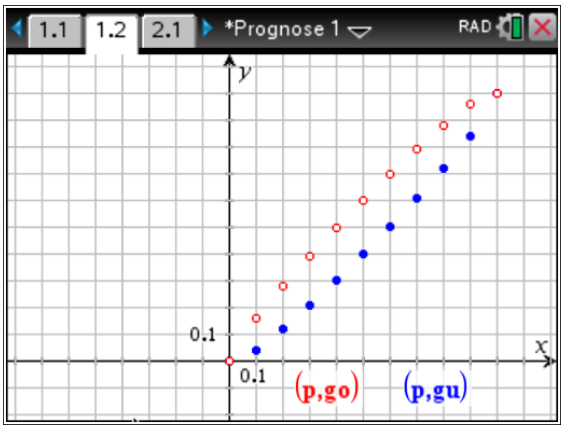


Abbildung 7: 04_Ellipsendiagramm.tns

6.1 Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz vorbereiten

Ziele:
- Begründen der Anwendbarkeit der Methode auf Sachverhalte, die sich nur näherungsweise mit dem Modell der Binomialverteilung beschreiben lassen,
- Anwenden der Handlungsanweisung für relative Häufigkeiten und
- erste Beobachtungen sammeln bezüglich der Abhängigkeit der Länge des Prognoseintervalls vom Stichprobenumfang

Auftrag für ein Experiment:
In dem Gefäß sind insgesamt fast viertausend schwarze, rote und gelbe Perlen enthalten. Das Gefäß wurde so gefüllt, dass ein Drittel aller Perlen schwarz sind.

a) Entnehmen Sie eine Stichprobe mit:
   Gr. A einem Löffel voll Perlen
   Gr. B vier Löffeln voll Perlen
b) Begründen Sie, dass das Modell der Binomialverteilung für die folgenden Untersuchungen näherungsweise verwendet werden kann.
c) Bestimmen Sie mit Ihrem Stichprobenumfang n sowie mit p = 1/3 ein 95 %-Prognoseintervall für den Anteil der schwarzen Perlen.
d) Ermitteln Sie die Länge Ihres Prognoseintervalls und vergleichen Sie die Intervalllängen der Gruppen A und B.

Lösungen:
Das Modell der Binomialverteilung kann hier nur näherungsweise angewendet werden, denn die Erhebung einer Stichprobe entspricht eher dem Modell „Ziehen ohne Zurücklegen“, während man bei einer binomialverteilten Zufallsgröße wegen der verlangten Unabhängigkeit der Einzelergebnisse vom „Ziehen mit Zurücklegen“ ausgeht. Die Näherung ist aber zulässig, weil der Umfang der Stichproben klein im Vergleich zur Gesamtzahl der Perlen ist.

Stichprobenergebnisse individuell; Erfassung z. B. mit der Tabelle:

Ein-Löffel-Arbeitsgruppen		Vier-Löffel-Arbeitsgruppen	
Nr.	Prognoseintervall mit Länge	Nr.	Prognoseintervall mit Länge
1		1	
2		2	
3		3	
4		4	
5		5	
6		6	
7		7	
Durchschnitt		Durchschnitt	

Die durchschnittliche Länge der 95 %-Prognoseintervalle der Gruppen A ist ungefähr _____________ so groß wie die durchschnittliche Länge der 95 %-Prognoseintervalle der Gruppen B.

6.2 Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz formulieren

Mit dem obigen Beispiel wird ein weiterer Aspekt der Interpretation von Prognoseintervallen für relative Häufigkeiten angerissen:
Die Untersuchung der Abhängigkeit der Länge des Prognoseintervalls der relativen Häufigkeiten vom Stichprobenumfang n.

Aus $g_u = p - 2 \cdot \frac{\sigma}{n} = p - 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$ und $g_o = p + 2 \cdot \frac{\sigma}{n} = p + 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$ lässt sich entnehmen, dass für die Differenz der Intervallgrenzen gilt: $d_p(n) = \ g_o - g_u = 4 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$.

Diese Differenz $d_p(n)$ beschreibt die Länge des 95 %-Prognoseintervalls in Abhängigkeit von n bei einer fest gewählten Wahrscheinlichkeit p.
Der Term kann so interpretiert werden:

Für ein und denselben Wert von p ist die Länge des Prognoseintervalls proportional zu $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Je größer der Stichprobenumfang n (bei festem p) ist, desto kleiner ist die Länge des Prognoseintervalls.

Dieser Zusammenhang wird **„Eins durch Wurzel n Gesetz“** genannt.

Eine griffige Interpretation dieses Gesetzes ist:

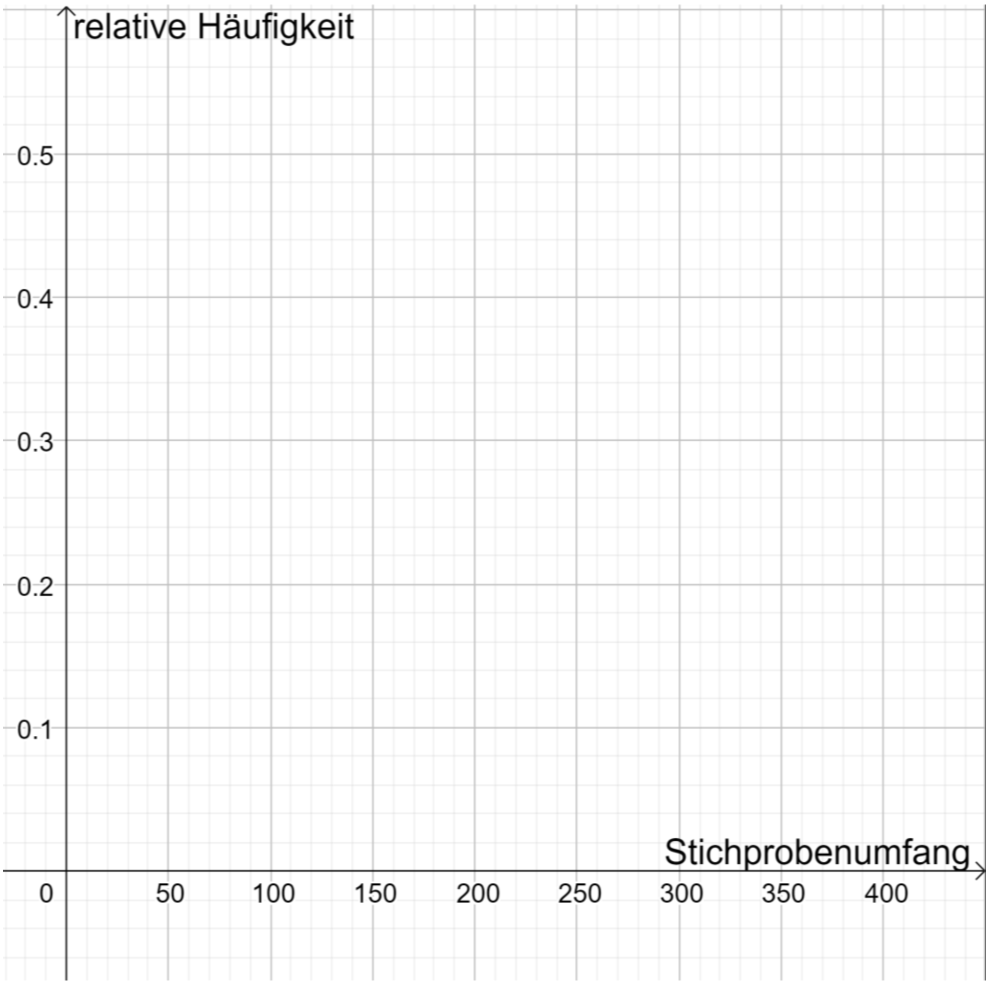
„Willst du die Länge des Prognoseintervalls halbieren, musst du den Stichprobenumfang vervierfachen.“

6.3 Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz am Beispiel veranschaulichen

Betrachtet wird das Ereignis A:
Bei n Würfen mit einem 2x2-Lego-Baustein liegt eine der vier gleichgroßen Seitenflächen oben. Folgende Ergebnisse wurden notiert. Sie legen als Punktschätzung p = 0,3 nahe.

n	30	60	90	120	180	210	360
H(A)	5	16	23	32	49	59	109
h(A)	0,17	0,27	0,26	0,27	0,27	0,28	0,30
g_u							
g_o							

Ergänzen Sie die Tabelle mit den zu n gehörenden Grenzen g_u und g_o
der 95 %-Prognoseintervalle unter der Annahme, dass P(A) = 0,3 gilt.
Zeichnen Sie die Funktionen $f_u(x) = 0{,}3 - 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7}}{\sqrt{x}}$ und $f_o(x) = 0{,}3 + 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7}}{\sqrt{x}}$ sowie die relativen Häufigkeiten und die 95 %-Prognoseintervalle für p = 0,3 in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n in das Diagramm ein.
Erläutern Sie die Bedeutung der grafischen Darstellungen im Sachzusammenhang mit dem $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz.



Lösung:

n	30	60	90	120	180	210	360
H(A)	5	16	23	32	49	59	109
h(A)	0,17	0,27	0,26	0,27	0,27	0,28	0,30
g_u	0,13	0,18	0,20	0,22	0,23	0,24	0,25
g_o	0,47	0,42	0,40	0,38	0,37	0,36	0,35

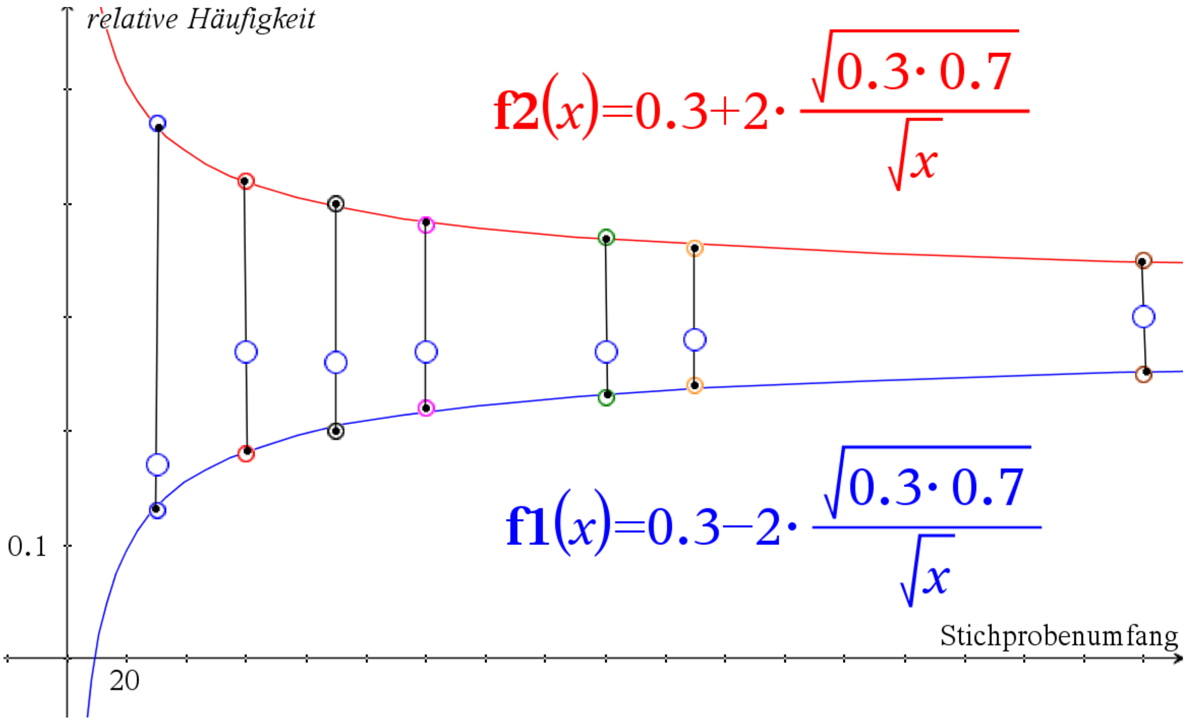


Abbildung 8: 05_Simulation_Eins_d_Wurzel_n.tns

Die Graphen der beiden Funktionen veranschaulichen die untere Grenze $g_u = p - 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$ bzw. obere Grenze $g_o = p + 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$ der Prognoseintervalle jeweils für p = 0,3 in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n.

Die eingezeichneten senkrechten Strecken geben die 95 %-Prognoseintervalle für den zugehörigen Stichprobenumfang n und p = 0,3 an.

Die großen blauen Kreise markieren die zu n gehörenden relativen Häufigkeiten h(A). Wie man sieht, sind sie jeweils im Inneren des Prognoseintervalls gelegen, also ist die angenommenen Wahrscheinlichkeit p = 0,3 verträglich mit diesen relativen Häufigkeiten.

6.4 Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz durch Simulation veranschaulichen für p = 0,5

Die schwarzen Graphen geben die untere bzw. obere Grenze des Prognoseintervalls in Abhängigkeit von n an. Die farbigen Punkte bilden relative Häufigkeiten für je 20 Simulationen binomialverteilter Zufallszahlen $B_{n;05}$ ab mit n = 50 (blaue Punkte), n = 200 (rote Punkte) und n = 800 (grüne Punkte). Man sieht sehr gut die Halbierung der Länge des Prognoseintervalls bei Vervierfachung des Stichprobenumfangs.
Außerdem ist erkennbar, dass einzelne wenige relative Häufigkeiten außerhalb des Prognoseintervalls liegen können. Die beiden Darstellungen zeigen zwei verschiedene Simulationen.

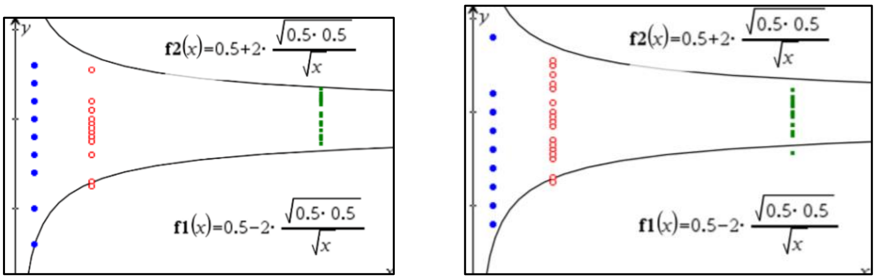


Abbildung 9

Wie erhält man diese Darstellung mit dem TI-Nspire?

1. Lists&Spreadsheet öffnen:

	A n_1	B z_1	C n_2	D z_2	E n_3	F z_3
=						
1	50	0.44	200	0.55	800	0.495
2	50	0.46	200	0.45	800	0.50875
3	50	0.5	200	0.525	800	0.52375

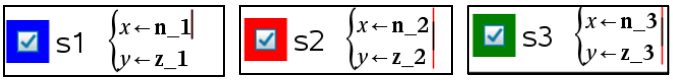
A1: 50 C1: 200 E1: 800
B1: =randbin(50,0.5)/50. D1: =randbin(200,0.5)/200. F1: =randbin(800,0.5)/800.

Diese Befehle mit <shift> markieren und mit <Menü><Daten><Füllen> bis in die Zeile 20 kopieren.
Spaltenköpfe wie oben zu sehen bezeichnen.

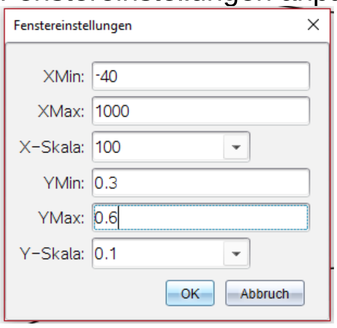
2. Graphs öffnen:

(1) Funktionen $f_1(x) = 0{,}5 - 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}5}}{\sqrt{x}}$ und $f_2(x) = 0{,}5 + 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}5}}{\sqrt{x}}$ zeichnen lassen.

(2) Eingabe „Streudiagramm“ wählen und die Variablen aus der Tabelle eintragen.



(3) Fenstereinstellungen anpassen



7 Mit Prognoseintervallen von Stichproben auf die Grundgesamtheit (von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit) schließen

Interpretation von Umfragen

In der Zeitschrift „ADAC-Motorwelt" 10/ 2018 ist u. a. zu lesen[6]:

„62 % der Autofahrer geben zu, gelegentlich das Höchsttempo zu überschreiten …"

Als Quelle wird das Meinungsforschungsinstitut forsa angegeben.

(1) Wie kommt man eigentlich zu so einer Aussage, die sich auch so lesen lässt, als hätten 62 % aller der über 17 Millionen Autofahrer in Deutschland diese Meinung geäußert? (Also, mich hat zum Beispiel niemand danach gefragt.)

Wir dürfen wohl annehmen, dass die Aussage auf dem Ergebnis einer repräsentativen (?) Umfrage beruht und die Redaktion der Zeitschrift es unterlassen hat, diese Tatsache zu erwähnen, aus welchen Gründen auch immer. Es ist kaum vorstellbar, alle Führerscheinbesitzer in Deutschland zu befragen.

(2) Wenn die Angabe 62 % auf einem Stichprobenergebnis beruht, was ist diese Aussage dann wert? Wir wissen doch, dass bei den Stichproben der Zufall auch eine Rolle spielt.

Angenommen, es wurden 1000 Personen befragt, von denen 620 zugegeben haben, gelegentlich die Höchstgeschwindigkeit zu überschreiten. Damit ist eine relative Häufigkeit von 0,62 gegeben. Wird diese Punktschätzung als Wahrscheinlichkeit für die Gesamtheit aller Führerscheinbesitzer angenommen, dann wissen wir aus unseren Kenntnissen über Prognoseintervalle, dass für p = 0,62 auch andere relative Häufigkeiten in Frage kommen, mit denen p = 0,62 verträglich ist.

(3) Prognoseintervalle zu mit p = 0,62 verträglichen relativen Häufigkeiten kann man berechnen, wenn man das Modell der Binomialverteilung zugrunde legen darf. Ist das hier überhaupt möglich?

Bei einer Umfrage wird ein und dieselbe Person nicht mehrfach befragt. Es handelt sich eigentlich um eine Stichprobe durch „Ziehen ohne Zurücklegen". Bei der Binomialverteilung wird das „Ziehen mit Zurücklegen" zugrunde gelegt. Wenn aber der Umfang der Stichprobe sehr klein gegenüber dem Umfang der Gesamtheit ist, lässt sich die Situation in guter Näherung mit einer Binomialverteilung mathematisch modellieren. Dies wäre hier der Fall, denn mehr als 17 Millionen Besitzer einer PKW-Fahrerlaubnis gegenüber vielleicht 1000 oder 2000 in einer Stichprobe befragten Personen lassen diesen Schluss zu. Auch deshalb ist es wichtig zu wissen, welchen Umfang die Stichprobe hat.

[6] Siehe: https://d2gg9evh47fn9z.cloudfront.net/800px_COLOURBOX7156604.jpg

(4) Wenn man das Modell der Binomialverteilung anwenden kann, lassen sich mit der 2σ-Regel alle zu p = 0,62 verträglichen relativen Häufigkeiten berechnen. Welche sind das?

Für n = 1000 und p = 0,62 erhält man das 95 %-Prognoseintervall [0,59; 0,65] für die relativen Häufigkeiten. Es ist natürlich nicht verwunderlich, dass auch h = 0,62 in diesem Intervall liegt.

(5) Denkbar ist aber auch, dass in der Gesamtheit aller Führerscheinbesitzer gar nicht p = 0,62 gilt, sondern ein davon (etwas) abweichender Wert. Trotzdem könnte eine solche andere Wahrscheinlichkeit p mit der in der Stichprobe ermittelten relativen Häufigkeit h = 0,62 verträglich sein.
Untersuchen Sie, welche der im Folgenden betrachteten Wahrscheinlichkeiten mit h = 0,62 verträglich sind. Ergänzen Sie dazu die fehlenden Grenzen (auf zwei Nachkommastellen gerundet) der 95 %-Prognoseintervalle für n = 1000 sowie die in der Tabelle angegebenen Werte von p.

Wahrscheinlichkeit p	0,58	0,60	0,62	0,64	0,66
untere Grenze für h	*0,55*	*0,57*	0,59	*0,61*	*0,63*
obere Grenze für h	*0,61*	*0,63*	0,65	*0,67*	*0,69*

Es ist zu erkennen, dass auch p = 0,60 und p = 0,64 mit h = 0,62 verträglich sind, denn h = 0,62 liegt in den zugehörigen Prognoseintervallen. Jedoch gilt das nicht für p = 0,58 und p = 0,66.

(6) Kann man davon ausgehen, dass auch alle Wahrscheinlichkeiten p im Intervall [0,60; 0,64] mit h = 0,62 verträglich sind?
Ergänzen Sie deshalb zunächst die Darstellung für die in Aufgabe (5) berechneten Prognoseintervalle im untenstehenden Diagramm. Das Prognoseintervall für p = 0,62 ist bereits eingezeichnet.

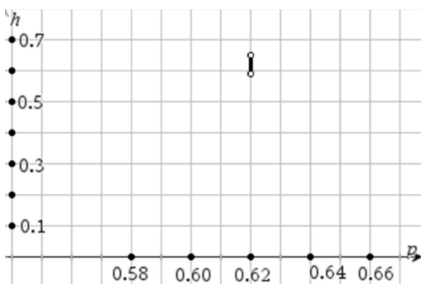
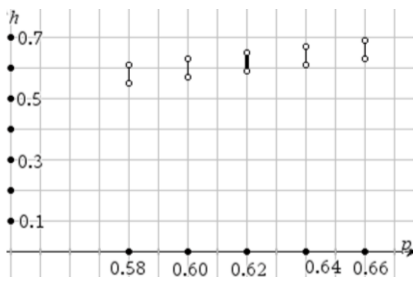


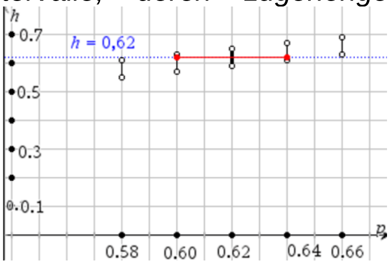
Abbildung 10

Lösung:



(7) Veranschaulichen Sie die relative Häufigkeit h = 0,62 im Diagramm durch eine Gerade. Welche der eingezeichneten Prognoseintervalle schneidet diese Gerade? Was bedeutet das? Welche nicht eingezeichneten Prognoseintervalle würde diese Gerade noch schneiden? Veranschaulichen Sie das zugehörige Intervall im Diagramm zu Aufgabe (6).

Die Gerade h = 0,62 schneidet die Prognoseintervalle, deren zugehörige Wahrscheinlichkeiten p = 0,60, p = 0,62 und p = 0,64 mit h = 0,62 verträglich sind. Sie würde alle zum Intervall $0{,}60 \leq p \leq 0{,}64$ *gehörenden Prognoseintervalle schneiden, d. h. alle Wahrscheinlichkeiten aus diesem Intervall wären mit h = 0,62 verträglich und brauchen nicht angezweifelt zu werden. Dieses Intervall wird im nebenstehenden Diagramm durch die rote Strecke veranschaulicht.*



(8) Äußern Sie eine begründete Vermutung darüber, wie sich dieses Intervall aus (4) und (5) verändert, wenn die Stichprobe nur 250 Personen umfassen würde. Überprüfen Sie Ihre Vermutung durch Nachrechnen analog zu Aufgabe (5).

Bei einem Stichprobenumfang von nur 250 gegenüber 1000 Personen (einem Viertel also), müssten nach dem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *–**Gesetz die Prognoseintervalle doppelt so groß sein. Damit könnte sich auch das Intervall der mit** h = 0,62 statistisch verträglichen Wahrscheinlichkeiten p vergrößern.*

Beispielrechnung für n = 250:

Wahrscheinlichkeit p	*0,58*	*0,60*	*0,62*	*0,64*	*0,66*
untere Grenze für h	*0,52*	*0,54*	*0,56*	*0,58*	*0,60*
obere Grenze für h	*0,64*	*0,66*	*0,68*	*0,70*	*0,72*
Länge des Intervalls	*0,12*	*0,12*	*0,12*	*0,12*	*0,12*

Die relative Häufigkeit h = 0,62 liegt in allen diesen Prognoseintervallen.
Das Intervall für die mit h = 0,62 statistisch verträglichen Wahrscheinlichkeiten p ist nach diesen Ergebnissen vermutlich <u>mindestens</u> der Bereich $0{,}58 \leq p \leq 0{,}66$.
Genauere Untersuchungen zeigen, dass dieses Intervall sogar die Wahrscheinlichkeiten [0,557; 0,679] umfasst. Wie man das mit der Bestimmung von Konfidenzintervallen herausfindet, ist Gegenstand des Unterrichts im Kurs mit erhöhtem Anforderungsniveau.

Beispielrechnung für n = 1000 (siehe Aufgabe (5):

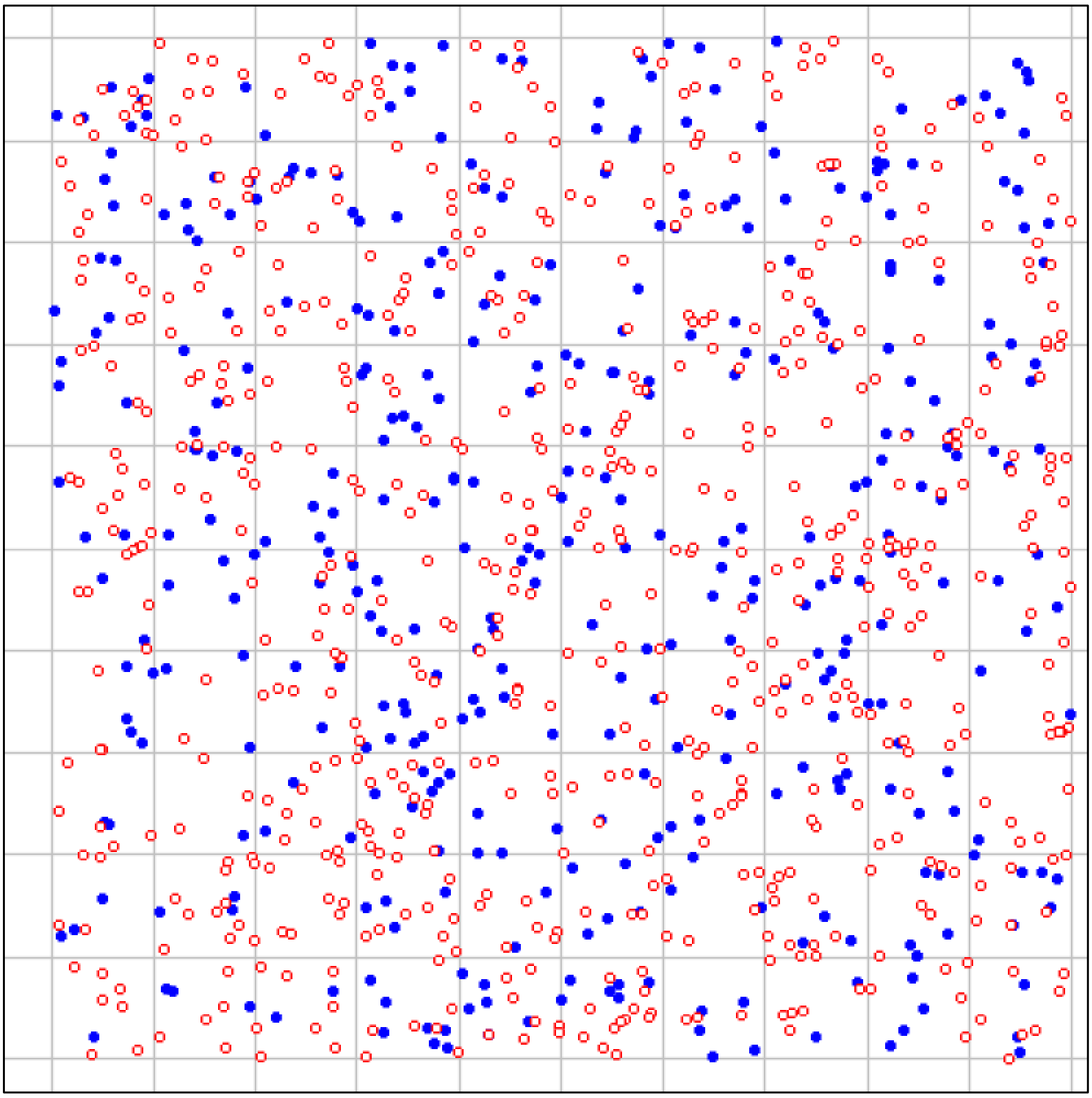
Wahrscheinlichkeit p	*0,58*	*0,60*	*0,62*	*0,64*	*0,66*
untere Grenze für h	*0,55*	*0,57*	*0,59*	*0,61*	*0,63*
obere Grenze für h	*0,61*	*0,63*	*0,65*	*0,67*	*0,69*
Länge des Intervalls	*0,06*	*0,06*	*0,06*	*0,06*	*0,06*

Für n = 1000 sind die Prognoseintervalle in der Tat halb so groß wie für n = 250.

(9) Nennen Sie Gründe dafür, dass es sinnvoll ist, bei Aussagen wie bei der aus der ADAC-Zeitung genauere Angaben zu ihrem Zustandekommen zu machen. Welche Angaben sollten das sein?

Angaben wie „62 % der Autofahrer geben zu, gelegentlich das Höchsttempo zu überschreiten …“ geben eine Punktschätzung der relativen Häufigkeit auf der Grundlage einer Stichprobe vom Umfang n an. Meinungsforschungsinstitute machen grundsätzlich keine Vollerhebungen. Der tatsächliche Anteil bleibt unbekannt. Man kann lediglich mit einer gewissen Sicherheit ein Intervall dafür angeben. Andererseits ist p = 0,62 (als Wahrscheinlichkeit gedeutet) ein gutes Modell zur Vorhersage der Ergebnisse zukünftiger Umfragen. Umfragen lassen sich in einer großen Grundgesamtheit als „Bernoulli-Experiment“ (Ziehen mit Zurücklegen) deuten, obwohl man streng genommen „ohne Zurücklegen“ arbeitet, da eine Person nicht zweimal befragt wird. Als Hintergrundinformationen zum Ergebnis von Umfragen sollten z. B. der Stichprobenumfang, das Datum der Erhebung und eine Fehlertoleranz angegeben werden. (nach Dr. Riemer)

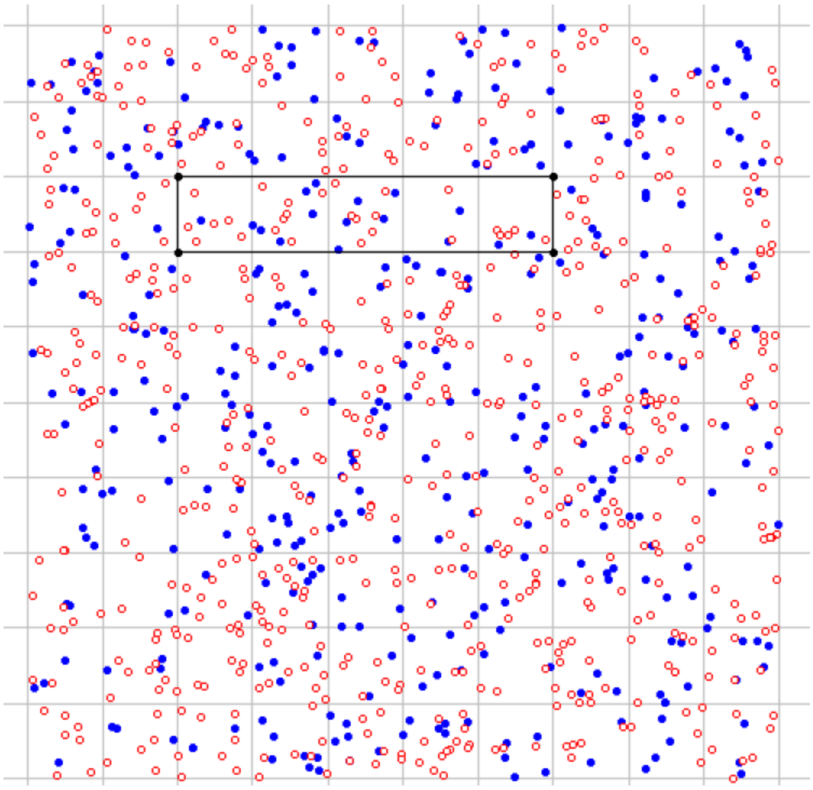
Eine Simulation der Situation mit Zufallspunkten



Das große Quadrat enthält viele rote und blaue Punkte, die zufällig über ein 10x10 Raster verteilt sind. Der Anteil der roten an allen Punkten soll durch eine Stichprobe geschätzt werden. Wählen Sie dazu eine überschaubare Anzahl der Felder aus. Ermitteln Sie für diesen Teilbereich den Anteil der roten Punkte an allen Punkten und prüfen Sie, ob die in der Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit der von Ihnen ermittelten relativen Häufigkeit h der roten Punkte verträglich sind. Geben Sie auf dieser Grundlage eine Vermutung für ein Intervall an, das den Anteil der roten Punkte im gesamten großen Quadrat überdeckt.

Wahrscheinlichkeit p	0,40	0,52	0,54	0,56	0,58	0,60	0,62	0,64	0,66	0,68	0,80
untere Grenze für h											
obere Grenze für h											

Lösung:
Es gibt individuelle Ergebnisse, je nachdem welche Teilfläche gewählt wurde und ob Punkte, die auf dem Rand der Teilfläche oder die fast übereinander liegen, mit- bzw. getrennt gezählt werden.
Zum Beispiel kann das so aussehen:



In dieser schwarz umrahmten Teilfläche wurden 27 rote und 16 blaue Punkte gezählt. Das ergibt für die roten Punkte eine relative Häufigkeit von $h = \frac{27}{43} \approx 0{,}628$.
Mit n = 27 + 16 = 43 ergeben sich in der Tabelle folgende Grenzen der zu p gehörenden 95 %-Prognoseintervalle.

Wahrscheinlichkeit p	0,40	0,52	0,54	0,56	0,58	0,60	0,62	0,64	0,66	0,68	0,80
untere Grenze für h	0,25	0,37	0,39	0,41	0,43	0,45	0,47	0,49	0,51	0,54	0,67
obere Grenze für h	0,55	0,67	0,69	0,71	0,73	0,75	0,77	0,79	0,81	0,82	0,92

Die Wahrscheinlichkeiten von p = 0,52 bis p = 0,68 sind hier mit der relativen Häufigkeit h = 0,628 verträglich, weil h in den zu diesen Wahrscheinlichkeiten gehörenden Prognoseintervallen liegt.
Nach dieser Stichprobe liegt also der Anteil der blauen Punkte im gesamten Quadrat bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % zwischen 52 % und 68 %.

Im Folgenden werden Hinweise dazu gegeben, wie diese Darstellung mit dem TI-Nspire erzeugt wurde. Es ist möglich, den Anteil einer Punkteart selbst festzulegen. Hier wurde mit Blick auf die ADAC-Aufgabe der Anteil der roten Punkte mit 62 % bestimmt.
Die Spaltenköpfe zeigen an, wie die Punktkoordinaten festgelegt werden. Hier sind 620 rote und 380 blaue Punkte mit ihren Zufallskoordinaten definiert worden. Bei der Erstellung dieser Punktwolke betrug der Anteil der roten Punkte im Gesamtquadrat demzufolge genau 62 %.

	A xblau	B yblau	C xrot	D yrot
=	=100*rand(380)	=100*rand(380)	=100*rand(620)	=100*rand(620)
1	66.9211	72.4243	58.1424	65.7754
2	20.8168	22.4033	36.6362	24.1886
3	61.2423	30.6202	99.3976	59.0691

Für jede Farbe werden diese dann als Streudiagramme dargestellt.

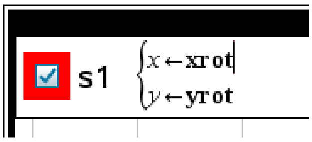


Abbildung 11: 06_rote_blaue Punkte.tns

Achten Sie darauf, dass die vom Rechner automatisch ausgewählte Farbe mit der Festlegung in der Tabellenkalkulation übereinstimmt.
Die Fenstereinstellungen müssen angepasst werden.
Mithilfe der Kontextmenüs „Attribute“ bzw. „Farbe“ werden Farbe und Form ggf. wie gewünscht eingestellt.
Mit dem Menü „Ansicht“ kann das Raster eingeblendet und können die Achsen ausgeblendet werden.

8 Beispiele für Übungsaufgaben mit Lösungshinweisen

(1) Das Kraftfahrt-Bundesamt gibt für das Jahr 2017 für PKW der Marke VW einen Anteil von 22 % an.
a) Ermitteln Sie Prognoseintervalle für die absolute und relative Häufigkeit des Auftretens von PKW der Marke VW in einer repräsentativen Stichprobe von n = 480 PKW.

[88; 123] bzw. [0,182; 0,258]

b) Bei dieser Stichprobe wurden 85 PKW der Marke VW gezählt. Interpretieren Sie das Ergebnis.

85/480 = 0,177 liegt nicht im Prognoseintervall;
Man hat keine repräsentative Stichprobe oder zufällig „Pech", weil die Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 % beträgt.

(2) Bei der maschinellen Fertigung von Schrauben beträgt die auch vom Auftraggeber geduldete Ausschussquote 5 %. In bestimmten Abständen werden der Produktion Stichproben von 600 zufällig ausgewählten Schrauben entnommen.
Ermitteln Sie mit einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95 %, in welchem Bereich der Ausschussanteil in der Stichprobe variieren kann, ohne dass ein Grund zur Beunruhigung vorliegt.[7]

Prognoseintervall [0,032; 0,068]

(3) Ein Spielwürfel wurde 500-mal geworfen, dabei erschien 80-mal eine Sechs.
Entscheiden Sie, ob es berechtigt ist, daran zu zweifeln, dass es sich um einen „fairen" Würfel handelt (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %).[8]

Prognoseintervall [0,133; 0,200] bzw. [67; 100]
Zweifel nicht berechtigt

(4) Bei einer Stichprobe kam es zu einer signifikanten Abweichung von der als richtig angenommenen Wahrscheinlichkeit p.
Erläutern Sie an einem selbst gewählten Beispiel, was das bedeutet.
Begründen Sie, weshalb dann zwar Zweifel an der Annahme zur Größe von p berechtigt sind, damit aber keine absolute Sicherheit dafür besteht, diese Annahme als falsch zu verwerfen.

Lösungsbeispiel individuell (z. B. eine nicht repräsentative Umfrage zur „Sonntagsfrage" in einer Gegend, in der bevorzugt die Partei ABC gewählt wird)
Begründung: Die Abweichung kann auch ausschließlich durch den Zufall bedingt sein.

[7] Adaptiert nach Bigalke/ Köhler „Mathematik – Gymnasiale Oberstufe" für Sachsen-Anhalt, Seite 162, Cornelsen 2016

[8] Adaptiert nach Bigalke/ Köhler „Mathematik – Gymnasiale Oberstufe" für Sachsen-Anhalt, Seite 161, Cornelsen 2016

(5) Eine Baumschule bietet exotische Bäume an, die von Großgärtnereien gekauft werden. 90 % der Bäume entwickeln sich nach dem Kauf im Verlauf von fünf Jahren gut und werden dann vom Gärtner mit einem Gewinn von 500 € an den Endkunden verkauft. Die restlichen Bäume verkümmern und verursachen 1000 € Verlust pro Baum. Ein Großgärtner will 2000 Bäume kaufen. Vorher möchte er seinen Gewinn kalkulieren, von dem er vermutlich ausgehen kann. Verwenden Sie für die Kalkulation ein Prognoseintervall.[9]

Prognoseintervall für n = 2000 und p = 0,9: [1773; 1827]
Mit 95 % Sicherheitswahrscheinlichkeit kann er 1773 Bäume mit einem Gewinn von je 500 € verkaufen, 227 Bäume ergeben einen Verlust von je 1000 €, das ergibt eine Bilanz von 659 500 € Gewinn.

(6) Der Buchstabe e kommt in deutschsprachigen Texten mit einer Wahrscheinlichkeit von 17,4 % vor. (Die Umlaute *ä, ö* und *ü* werden wie *ae, oe* und *ue* gezählt, *ß* als eigenständiges Zeichen.[10])
Ermitteln Sie die relative Häufigkeit des Buchstaben e in den folgenden Texten und prüfen Sie, ob die Ergebnisse signifikant von p = 0,174 abweichen.

Ueber allen Gipfeln Ist Ruh', In allen Wipfeln Spürest Du Kaum einen Hauch; Die Vögelein schweigen im Walde. Warte nur! Balde Ruhest du auch.	ottos mops trotzt otto: fort mops fort ottos mops hopst fort otto: soso
Johann Wolfgang von Goethe	*Ernst Jandl*

Goethe: Prognoseintervall für „e“ mit n = 114 und p = 0,174: [0,103; 0,245] bzw. [12;27]; h = 0,17 liegt drin
Jandl: Prognoseintervall für „e“ mit n = 57 und p = 0,174: [0,074; 0,27]; h = 0 liegt nicht drin

(7) Im untenstehenden Diagramm sind für n = 100 und die Wahrscheinlichkeiten p von 0; 0,1; 0,2; …; 1 die zugehörigen 95 %-Prognoseintervalle der relativen Häufigkeiten grafisch dargestellt.

a) Lesen Sie aus dem Diagramm näherungsweise das Prognoseintervall zu p = 0,3 ab.

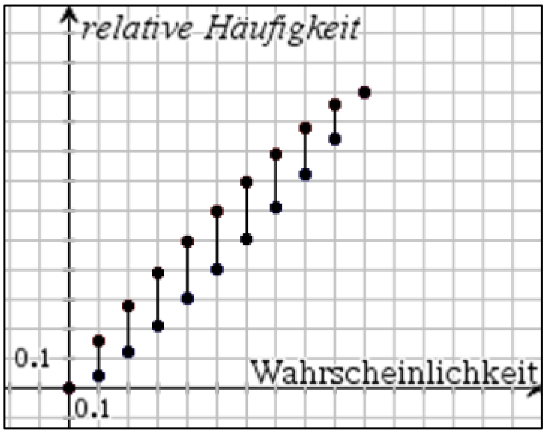
b) Entscheiden Sie anhand der grafischen Darstellung, ob die relative Häufigkeit h = 0,33 signifikant von p = 0,2 abweicht.

c) Geben Sie anhand der grafischen Darstellung mindestens drei relative Häufigkeiten an, die mit p = 0,8 statistisch verträglich sind.

[9] Zitiert aus Bigalke/ Köhler „Mathematik – Gymnasiale Oberstufe“ für Hessen, Seite 245, Cornelsen 2018

[10] https://de.wikipedia.org/wiki/Buchstabenhäufigkeit

d) Welche Veränderungen an der grafischen Darstellung vermuten Sie, wenn diese statt für n = 100 für n = 400 erstellt wird?



a) *[0,2; 0,4]*
b) *signifikante Abweichung*
c) *drei Werte aus (0,736; 0,864)*
d) *die Prognoseintervalle werden schmaler*

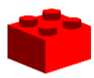
(8) Bestimmen Sie mit dem Zufallsgenerator Ihres CAS-Rechners 20mal je 200 ganzzahlige Zufallszahlen von 1 bis 4, und lassen Sie jeweils die Anzahl der Einsen zählen. Prognostizieren Sie, in welches zum Erwartungswert symmetrische Intervall die Anzahl der Einsen mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit fällt.

countIf(randInt(1,4,200),1)	45
countIf(randInt(1,4,200),1)	46
countIf(randInt(1,4,200),1)	54

Wie oft lag das Stichprobenergebnis bei den 20 Durchführungen außerhalb des Prognoseintervalls? Vergleichen Sie Ihre Beobachtung mit den Ergebnissen von Mitschülern.
Haben Sie eine Erklärung für die Beobachtungen?

Das Prognoseintervall ist [38; 62]. Wegen $\beta = 95\%$ müssten bei 20 Durchführungen etwa 5 % der Stichproben (also eine von 20 Stichproben) außerhalb des Prognoseintervalls liegen.

(9) Beim Würfeln unter gleichbleibenden Bedingungen mit einem 2x2-Lego-Baustein wird das Ereignis A: „*Eine der vier gleichgroßen Seitenflächen liegt oben*." betrachtet. Eine theoretische Wahrscheinlichkeit p für dieses Ereignis ist unbekannt. In einer Stichprobe von 360 Würfen ergab sich 109mal das Ereignis A.



Prüfen Sie mithilfe von 95 %-Prognoseintervallen, welche der Wahrscheinlichkeiten 0,25; 0,27; 0,29; …; 0,35; 0,37 mit diesem Versuchsergebnis bei einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95,4 % noch verträglich sind, d. h. nicht bezweifelt werden müssen.

Relative Häufigkeit $h = \frac{109}{360} \approx 0{,}303$; *Hinweis: Konfidenzintervall: [0,257; 0,353]*

p	*Prognoseintervall*	*h drin?*
0,25	*(0,205; 0,295)*	*nein*
0,27	*(0,224; 0,316)*	*ja*
0,29	*(0,243; 0,337)*	*ja*
0,31	*(0,262; 0,358)*	*ja*
0,33	*(0,281; 0,379)*	*ja*
0,35	*(0,300; 0,400)*	*ja*
0,37	*(0,320; 0,420)*	*nein*

Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien Bad Berka
Dr. Wilfried Zappe
März 2019