Operatoren Mathematik

Operator	Beschreibung	Beispiel
analysieren	einen gegebenen Sachverhalt in seine Bestandteile zerlegen, seine wesentlichen Merkmale auf der Grundlage von Kriterien erfassen und ihre Beziehungen zueinander darstellen	Ma (17)
begründen	für einen gegebenen Sachverhalt einen folgerichtigen Zusammenhang zwischen Ursache(n) und Wirkung(en) herstellen	Ma (1) Ma (23c)
berechnen	ausschließlich rechnerische Generierung der Ergebnisse, wobei der Lösungsweg nachvollziehbar ist	Ma (2) Ma (23g)
beschreiben	Sachverhalte wie Objekte und Prozesse und Vorgehensweisen räumlich bzw. zeitlich geordnet darlegen	Ma (3) Ma (23i)
bestimmen, ermitteln	rechnerische, graphische oder inhaltliche Generierung eines Ergebnisses	Ma (4) Ma (23d, f, h)
beurteilen, bewerten	Sachverhalte bzw. Aussagen anhand geeigneter Kriterien unter Nutzung von Fachwissen bzw. Fachmethoden reflektieren, prüfen, an Wertkategorien messen und auf dieser Grundlage eine begründete Stellungnahme formulieren	Ma (18)
beweisen, zeigen, nachweisen,	mit Hilfe von sachlichen Argumenten durch logisches Herleiten eine Behauptung/Aussage belegen bzw. widerlegen	Ma (5)
darstellen, präsentieren	Sachverhalte, Zusammenhänge, Methoden, Ergebnis etc. strukturiert wiedergeben	Ma (6)
definieren	die Bedeutung eines Begriffs unter Abgrenzung zu benachbarten Begriffen und der Angabe unveränderlicher Merkmale bestimmen	Ma (7)
entscheiden	sich bei Alternativen eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen	Ma (21)
erklären	Strukturen, Prozesse, Zusammenhänge usw. des Sachverhaltes erfassen und auf allgemeine Aussagen/Gesetze zurückführen	Ma (8)
erläutern	wesentliche Seiten eines Sachverhalts/Gegenstands/Vorgangs an Beispielen verständlich machen	Ma (19)
interpretieren	Sachverhalte/Zusammenhänge/Fakten oder Daten analysieren, sie deuten bzw. erklären	Ma (16)
klassifizieren, ordnen	Begriffe, Gegenstände etc. auf der Grundlage bestimmter Merkmale systematisch einteilen	Ma (9)
messen	Größen mit Hilfe geeigneter Messgeräte bestimmen	Ma (10)
nennen, angeben	Fakten/Sachverhalte, Begriffe ohne Erläuterung wiedergeben	Ma (11) Ma (23a,c,e,i)
protokollieren	den Ablauf und mögliche Zwischen- und Endergebnisse einer Handlung, eines Versuchs oder eines Vorgangs übersichtlich und gegliedert festhalten	Ma (20)
prüfen	Wahrheitsgehalt feststellen	Ma (22)
skizzieren	Sachverhalte, Objekte, Strukturen oder Ergebnisse auf das Wesentliche reduziert (vereinfacht) übersichtlich darstellen	Ma (12) Ma (23b)
untersuchen	Sachverhalte/Objekte erkunden, Merkmale und Zusammenhänge herausarbeiten	Ma (13) Ma (23a)
vergleichen	Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Sachverhalten, Objekten, Lebewesen und Vorgängen auf der Basis festgelegter Kriterien feststellen	Ma (14)
zeichnen	eine exakte graphische Darstellung unter Verwendung von Zeichengeräten anfertigen	Ma (15)

Ma (1)

a) In einem Beutel befinden sich genau 3 gelbe und 4 blaue Murmeln. Aus ihm sollen ohne hineinzusehen Murmeln gezogen werden.
Paul, Tina und Rolf überlegen, wie viele Murmeln sie aus dem Beutel ziehen müssen, um ganz sicher von jeder Farbe mindestens eine Murmel zu haben.
Wer hat recht? Kreuze an und **begründe** deine Entscheidung.

☐ Paul sagt: „Es reichen zwei Murmeln."

☐ Tina sagt: „Es müssen mindestens fünf Murmeln sein."

☐ Rolf sagt: „Vier Murmeln reichen."

Erwartete Dokumentation:

☒ Tina sagt: „Es müssen mindestens fünf Murmeln sein."

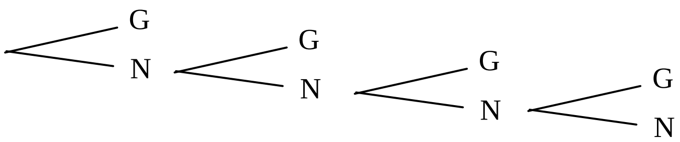
Begründung, z. B.: Wenn drei gelbe Murmeln gezogen wurden, muss die nächste Murmel blau sein. Wenn vier blaue Murmeln gezogen wurden, ist die nächste Kugel gelb. Ansonsten hat man bereits eher von jeder Farbe eine Murmel.

b) Vgl. BLF 2012 Wahlaufgabe 1, Aufgabe 3.

In einer Lostrommel befinden sich 6 Gewinnlose und 14 Nieten.
In der Lostrommel sind zum Schluss genau vier Lose. Darunter befindet sich ein Gewinnlos. Vier Kinder dürfen nacheinander je ein Los ziehen. Paul behauptet: „Das erste Kind hat eine höhere Gewinnchance als das vierte Kind."
Stimmt das? **Begründe** deine Entscheidung unter Nutzung eines geeigneten Baumdiagramms.

Erwartete Dokumentation:

Baumdiagramm: G – Gewinn N – Niete



Entscheidung: Beide Kinder gewinnen mit einer Wahrscheinlichkeit von $P = \frac{1}{4}$.

Begründung: 1. Kind: $P(G) = \frac{1}{4}$

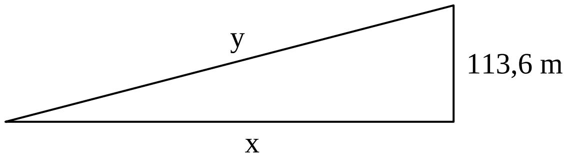
4. Kind: $P(NNNG) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

Ma (2)

a) Der Skilift in Ernstthal am Rennsteig überwindet einen Höhenunterschied von 113,6 m und hat eine Steigung von 22,4 %.
Berechne die Länge der Strecke, die man mit dem Lift zurücklegt.

Erwartete Dokumentation, z. B.:

Skizze:



$$0{,}224 = \frac{113{,}6}{x}$$

$$y = \sqrt{113{,}6^2 + \left(\frac{113{,}6}{0{,}224}\right)^2} \qquad \rightarrow \; y \approx 519{,}7\,\text{m}$$

b) Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 12tx + 1$.

Berechne lokale Extremstellen von f.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

Aus $f'(x_E) = 0$ folgen die möglichen lokalen Extremstellen

$x_{E_1} = -\left(\sqrt{-2t+4} - 2\right)$ und

$x_{E_2} = \sqrt{-2t+4} + 2$. Diese existieren für $t < 2$.

$f''(x_1) = -12\sqrt{-2t+4} < 0$ für $t < 2$

x_{E_1} ist Maximumstelle für $t < 2$

$f''(x_2) = 12\sqrt{-2t+4} > 0$ für $t < 2$

x_{E_2} ist Minimumstelle für $t < 2$

c) Vgl. BLF 2012 Pflichtaufgabe c)

Bei einem Besuch des Baumkronenpfades zahlen vier Erwachsene und drei Kinder 43,00 € Eintritt. Sechs Erwachsene und fünf Kinder zahlen 66,00 € Eintritt.

Berechne den Eintrittspreis für einen Erwachsenen sowie für ein Kind.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

e… Preis für 1 Erwachsenen in €

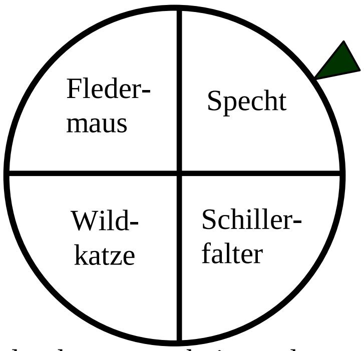
k… Preis für 1 Kind in €

$$4e + 3k = 43$$
$$6e + 5k = 66$$
$$e = 8{,}50$$
$$k = 3$$

Antwort: Der Eintrittspreis für einen Erwachsenen beträgt 8,50 €, für ein Kind 3 €.

d) Vgl. BLF 2012 Pflichtaufgabe d)

Auf dem Baumkronenpfad befinden sich die Plattformen Fledermaus, Specht, Wildkatze und Schillerfalter. Eine Schulklasse wählt diese Motive für ein Glücksrad mit vier gleich großen Sektoren.



Die Kreisfläche wird aus einem Quadrat herausgeschnitten, dessen Seitenlänge dem Durchmesser des Kreises entspricht.
Berechne den prozentualen Abfall.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

$$A_{Qua} = 4r^2$$

$$A_{Kreis} = \pi r^2$$

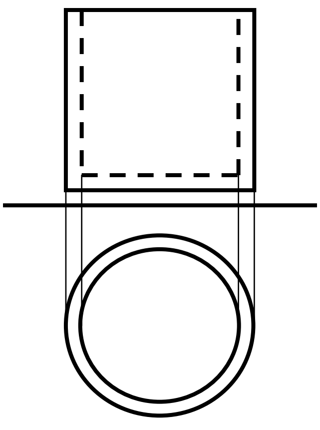
$$Abfall_{absolut} = 4r^2 - \pi r^2$$

$$Abfall_{relativ} = \frac{4r^2 - \pi r^2}{4r^2} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}2146$$

Antwort: Es sind 21,5 % Abfall.

e) Vgl. BLF 2012 Wahlaufgabe 2 – 4.

In der Zweitafelprojektion ist ein Pflanzgefäß aus Beton dargestellt.
Der Außendurchmesser und die Außenhöhe des Gefäßes betragen jeweils 50 cm.
Die Stärken der Wand und des Bodens betragen 5 cm.



Die Dichte des Betons beträgt $2{,}4\,\text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$.
Berechne die Masse des Pflanzgefäßes.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

$$V = V_{groß} - V_{klein}$$

$$V_{groß} = \pi \cdot r_g^{\,2} \cdot h_g \qquad V_{klein} = \pi \cdot r_k^{\,2} \cdot h_k$$

$$V = \pi \cdot (2{,}5\text{ dm})^2 \cdot 5\text{ dm} - \pi \cdot (2\text{ dm})^2 \cdot 4{,}5\text{ dm}$$

$$V \approx 41{,}63\text{dm}^3$$

$\rho = \frac{m}{V}$ → $m \approx 100\text{ kg}$ Die Masse des Pflanzgefäßes beträgt ungefähr 100 kg.

f) Vgl. BLF 2012 Wahlaufgabe 1 – 3.

In einer Lostrommel befinden sich 6 Gewinnlose und 14 Nieten.
Aus der Lostrommel werden nacheinander einzeln Lose gezogen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: = „Das dritte entnommene Los ist das erste Gewinnlos.“
B: = „Unter den ersten drei Losen ist genau ein Gewinnlos.“

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

$P(A) = P(NNG) = \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} \cdot \frac{6}{18} = \frac{91}{570}$ N – Niete G – Gewinn

$P(B) = P(NNG, NGN, GNN) = 3 \cdot P(A) = \frac{91}{190}$

Oder Lösung mit Hilfe Baumdiagramm

Ma (3)
a) Gegeben ist ein Dreieck ABC mit a = 7 cm, b = 5 cm und c = 4 cm.
Beschreibe die Konstruktion des Dreiecks ABC mit Hilfe des Kongruenzsatzes SSS.

Erwartete Dokumentation, z. B.:
Zeichne mit dem Lineal die Strecke $\overline{AB}$ mit einer Länge von 4 cm.
Zeichne einen Kreis um den Punkt B mit dem Radius $r = 7\,cm$.
Zeichne einen Kreis um den Punkt A mit dem Radius $r = 5\,cm$.
Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten C_1 und C_2. Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind kongruent zueinander.
Bemerkung: Beachtet man den mathematisch positiven Drehsinn, erhält man genau ein Dreieck.

b) **Beschreibe** das rechnerische Vorgehen.

(1) $5 \cdot 2\frac{3}{5} = 5 \cdot \frac{13}{5} = \frac{65}{5} = 13$

(2) $5 \cdot 2\frac{3}{5} = 5 \cdot 2\frac{6}{10} = 5 \cdot 2{,}6 = 13$

(3) $5 \cdot 2\frac{3}{5} = 5 \cdot \left(2 + \frac{3}{5}\right) = 10 + \frac{15}{5} = 10 + 3 = 13$

Die Dokumentation muss folgende Aspekte enthalten:
- Beschreibung in vollständigen Sätzen
- (1) Umwandlung der gemischten Zahl in einen gemeinen Bruch, Vervielfachen eines Bruchs
- (2) auf Zehnerbruch erweitern, um gemischten Bruch als Dezimalzahl darzustellen, Vervielfachen einer Dezimalzahl
- (3) Darstellung der gemischten Zahl als Summe, Ausmultiplizieren, Bruch als natürliche Zahl angeben, addieren der natürlichen Zahlen

c) Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = (2 - x) \cdot e^x$ und $g(x) = (1 - x) \cdot e^{x+1}$ $(x \in R)$.
Beschreibe, wie der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.

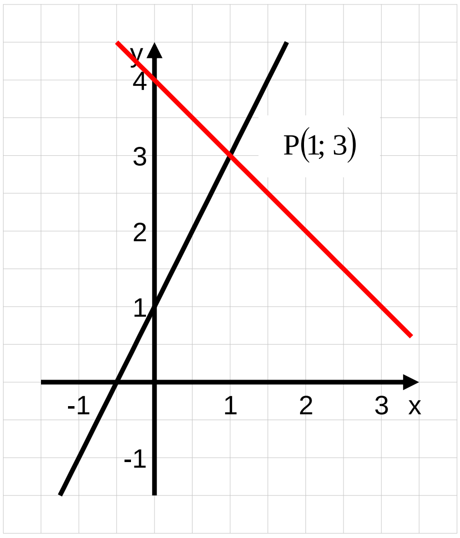
Erwartete Dokumentation:
Man erhält den Graphen von g, indem der Graph von f um 1 LE in Richtung der x-Achse nach links verschoben wird. Es gilt: $g(x - 1) = f(x)$.

Ma (4)
a) Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem.
(I) $y = 2x + 1$
(II) $y = -x + 4$
Bestimme die Lösungsmenge.

Erwartete Dokumentation, z. B.:
rechnerisch:

$$2x + 1 = -x + 4$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$
$$y = 3$$
$$L = \{1;\, 3\}$$

grafisch:

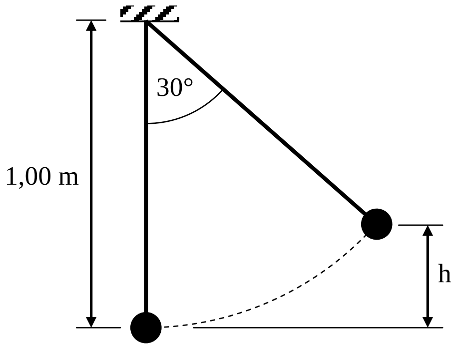


$$L = \{1;\, 3\}$$

b) **Ermittle** die Höhe, die das Pendel (siehe Skizze) bei einem Auslenkwinkel von 30° erreicht.

Erwartete Dokumentation:

$$\cos 30° = \frac{(1\,\text{m} - h)}{1\,\text{m}}$$
$$h = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{m} \approx 0{,}13\,\text{m}$$



Skizze (nicht maßstäblich)

c) Die Olympischen Sommerspiele fanden 2008 in der chinesischen Hauptstadt Peking statt. Dabei belegten im 100 m-Lauf der Frauen drei Jamaikanerinnen die ersten drei Plätze.
Bestimme die Kenngrößen.

Platz	Name	Nation	Zeit in Sekunden
1	Shelly-Ann Fraser	JAM	10.78
2	Kerron Stewart	JAM	10.98
2	Sherone Simpson	JAM	10.98
4	Lauryn Williams	USA	11.03
5	Muna Lee	USA	11.07
6	Jeanette Kwakye	GBR	11.14
7	Debbie Ferguson	BAH	11.19
8	Torri Edwards	USA	11.20

Nach: http://www.sportal.de/sportal/olympia_2008/ergebnisse/index.html?damher=damen&sportart=leichtathletik&runde=-100m&modus=3

Erwartete Dokumentation:
Minimum: 10,78 s
Maximum: 11,20 s
Spannweite: 0,42 s
Modalwert: 10,98 s
Arithmetisches Mittel: 11,05 s
Median: 11,05 s

d) Ein Vater erfasst am Jahresende die Körpergrößen seiner sieben Kinder (Größe in cm):

Anna	Frank	Olaf	Ines	Mario	Grit	Marie
150	152	182	104	152	142	112

Ermittle die Kenngrößen.

Erwartete Dokumentation:
Minimum: 104 cm
Maximum : 182 cm
Spannweite: 78 cm
Modalwert: 152 cm
Arithmetisches Mittel: 142 cm
Median: 150 cm

e) **Ermittle** die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

Erwartete Dokumentationen bei Verwendung von CAS:
Die ganzrationale Funktion 3. Grades hat maximal 3 Nullstellen.
Aus der graphischen Analyse des Funktionsgraphen ergeben sich die Nullstellen:
$x_{01} = 1;$ $x_{02} = -3$
oder
$0 = (x_0 + 3)(x_0 - 1)^2$
$x_{01} = 1;$ $x_{02} = -3$
oder …

f) **Bestimme** den maximalen Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:
Aus $x^2 - 4x \geq 0$ folgt $x \in R$ und $x \leq 0$ oder $x \geq 4$.

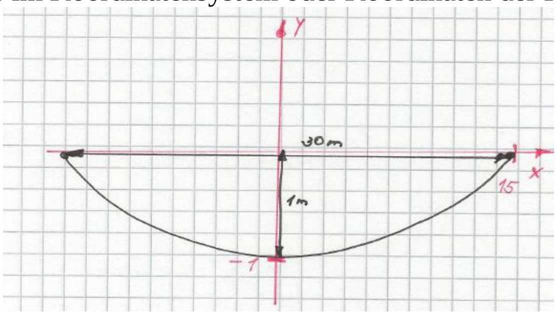
g) Vgl. BLF 2012 Pflichtaufgabe b)

Zwei Punkte auf dem Baumkronenpfad sind 30 m voneinander entfernt und befinden sich in einer Höhe von 20 m. Sie sind durch eine Hängebrücke verbunden, die in der Mitte 1 m durchhängt. Die Form der Hängebrücke kann näherungsweise durch eine Parabel beschrieben werden.

Ermittle eine Gleichung dieser Parabel.

Die Dokumentation bei Verwendung von CAS muss folgende Aspekte enthalten:

- Skizze des Sachverhalts im Koordinatensystem oder Koordinaten der Punkte, z. B.:



- geeigneter Ansatz: $y = ax^2 + c$
- Ergebnis: $y = \frac{1}{225}x^2 - 1$

h) Vgl. BLF 2012 Wahlaufgabe 2.a)

Der Graph einer linearen Funktion f verläuft durch die Punkte $P(0;1)$ und $Q(8;0{,}5)$.
Ermittle die Nullstelle dieser Funktion.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

$$0 = -\frac{1}{16}x_0 + 1$$
$$x_0 = 16$$

i) Vgl. BLF 2012 Wahlaufgabe 1 – 2.b)

Der Graph einer linearen Funktion f verläuft durch die Punkte $P(0;1)$ und $Q(8;0{,}5)$.
Bestimme je eine Gleichung der linearen Funktionen g und h, für die Folgendes gilt:
- Der Graph der Funktion g verläuft parallel zum Graph von f.
- Der Graph der Funktion h schneidet den Graph von f

im Punkt Q rechtwinklig.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

z. B. rechnerische Lösung: $f(x) = -\frac{1}{16}x + 1$

wenn g || f, dann z. B. $y = -\frac{1}{16}x$

wenn g ⊥ h und beide durch $Q(8;0{,}5)$, dann

$-\frac{1}{16} \cdot m_2 = -1$, also $m_2 = 16$

$y = mx + n$

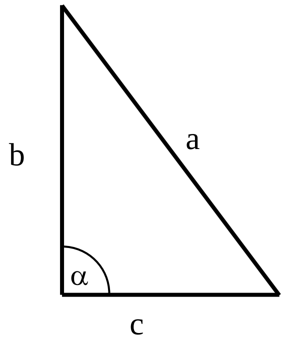
$0{,}5 = 16 \cdot 8 + n$

$n = -127{,}5$

$y = 16x - 127{,}5$

Ma (5)
a) Gegeben ist ein Dreieck ABC mit a = 10 cm, b = 8 cm und c = 6 cm.
Weise nach, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

Erwartete Dokumentation:



Wenn $a^2 = b^2 + c^2$, dann $\alpha = 90°$.

$(10\,cm)^2 = (8\,cm)^2 + (6\,cm)^2$

$100\,cm^2 = 100\,cm^2$ w. A.

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.

b) **Zeige**, dass die folgende Aussage falsch ist:
„Wenn ich die Zahl 6 mit einer beliebigen anderen Zahl multipliziere, dann ist das Produkt immer größer als 6.“

Erwartete Dokumentation, z. B.:
$6 \cdot 0{,}5 = 3 < 6$

c) Vgl. BLF 2012 Wahlaufgabe 2 – 2.

Zeige, dass für alle reellen Zahlen x mit $x \neq -1$ die Gleichung $\left(10^{x^2-1}\right)^{\frac{1}{x+1}} = 10^{x-1}$ gilt.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

$$\left(10^{x^2-1}\right)^{\frac{1}{x+1}} = 10^{\frac{x^2-1}{x+1}} = 10^{\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}} = 10^{x-1}$$

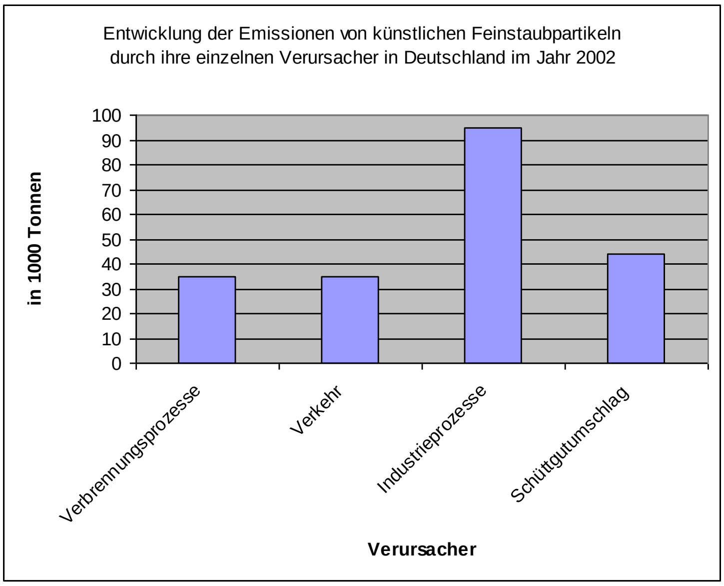
Ma (6)
a) Folgende Tabelle zeigt die Entwicklung der Emissionen von künstlichen Feinstaubpartikeln durch ihre einzelnen Verursacher in Deutschland.

Jahr / Verursacher	*1990*	*1994*	*1998*	*2002*
Verbrennungsprozesse	1255	143	40	35
Verkehr	61	59	48	35
Industrieprozesse	431	113	102	95
Schüttgutumschlag	136	59	45	44

(alle Angaben in 1000 Tonnen)

Stelle die Verteilung der Feinstaubemissionen auf die einzelnen Verursacher für das Jahr 2002 in einem geeigneten Diagramm **dar**.

Erwartete Dokumentation, z. B.:



b) Erstelle ein Mindmap zum Thema „Teilbarkeitsregeln“. **Präsentiere** dein Mindmap vor der Klasse.

Erwartete Dokumentation:
- Mindmap
- Präsentation

Ma (7)
a) **Definiere** den Begriff „Primzahl“.

Erwartete Dokumentation:
Alle natürlichen Zahlen, die genau zwei Teiler haben, sind Primzahlen.

b) **Definiere** den Begriff „Rechteck".

Erwartete Dokumentation:
Ein Rechteck ist ein ebenes Viereck, dessen Innenwinkel rechte Winkel sind.

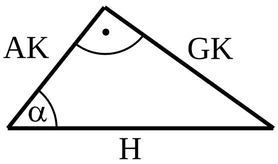
Ma (8)
a) **Erkläre**, dass ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben kann.

Erwartete Dokumentation, z. B.:
Das Gleichungssystem kann grafisch gelöst werden, indem man beide Gleichungen als Geradengleichungen aufgefasst. Die Lösung des Gleichungssystems sind die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Geraden. Wie viele Lösungen das Gleichungssystem hat, ist an der Lage der Geraden im Koordinatensystem erkennbar. Es gibt drei Fälle:
a) Die Geraden verlaufen parallel. Das Gleichungssystem hat keine Lösung.
b) Die Geraden schneiden sich in einem Punkt. Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.
c) Die Geraden sind identisch. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

b) **Erkläre** den folgenden Zusammenhang zwischen Sinus, Kosinus und Tangens eines Winkels.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

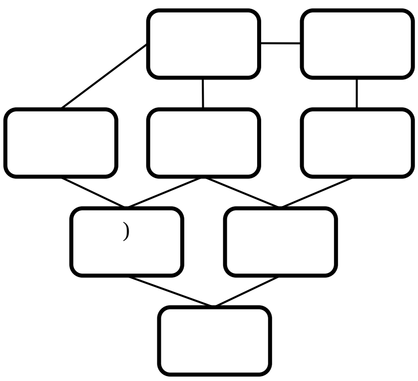
Erwartete Dokumentation:



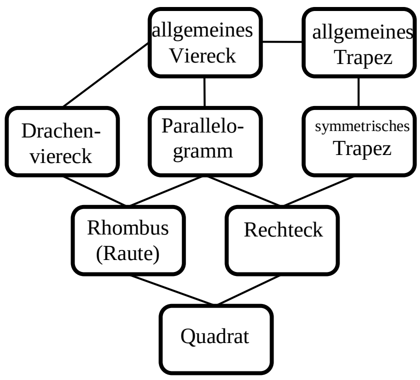
Für rechtwinklige Dreiecke gilt:
$\sin\alpha = \frac{GK}{H}$, $\cos\alpha = \frac{AK}{H}$, $\tan\alpha = \frac{GK}{AK}$
Daraus folgt: $\tan\alpha = \frac{H\cdot\sin\alpha}{H\cdot\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Ma (9)
Ordne die dir bekannten Arten von Vierecken nach ihren Symmetrieeigenschaften in folgende Übersicht **ein**.

„Haus der Vierecke"



Erwartete Dokumentation:



Ma (10)
Miss die Größe deiner Mitschüler. **Gib** diese an.

Die Dokumentation muss folgenden Aspekt enthalten:
- Angabe der Größe der Mitschüler

Ma (11)
a) **Nenne** Eigenschaften einer quadratischen Funktion.

Erwartete Dokumentation, z. B.:
- Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind quadratische Funktionen
- Graph ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt S
- achsensymmetrisch zur Gerade durch S, die parallel zur y-Achse
- Schnittpunkt mit der y-Achse $P_y(0; c)$
- Anzahl der Nullstellen (keine, eine, zwei) in Abhängigkeit von der Diskriminante
- y-Wert des Scheitelpunktes ist größter bzw. kleinster Funktionswert

b) **Gib** den Definitionsbereich, den Wertebereich und die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen der folgenden Funktion **an**.

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 3$$

Erwartete Dokumentation:
Definitionsbereich: $x \in R,\ x \geq -2$
Wertebereich: $y \in R,\ y \geq -3$
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $P_x(7; 0),\ P_y\left(0; \sqrt{2} - 3\right)$

c) **Gib** die Koordinaten des lokalen Extrempunktes der Funktion $f(x) = x^2 - 6x + 11$ **an**.

Erwartete Dokumentation: lokaler Extrempunkt: T(3; 2)

d) **Gib** den maximalen Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \ln(x - 5)$ **an**.

Erwartete Dokumentation: $x \in R$ und $x > 5$

e) Vgl. BLF 2012 Wahlaufgabe 2 – 1.c)

Gegeben ist die Funktion $f_3(x) = 3 \cdot \sin x$.
(1): Der Graph von f_3 wird um zwei Einheiten in Richtung der positiven y-Achse verschoben.
(2): Der Graph von f_3 wird an der x-Achse gespiegelt.
Gib jeweils eine Funktionsgleichung **an**.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:
(1) $f(x) = f_3(x) + 2$
(2) $g(x) = (-1) \cdot f_3(x)$
oder
(1) $f(x) = 3 \cdot \sin x + 2$
(2) $g(x) = -3 \cdot \sin x$

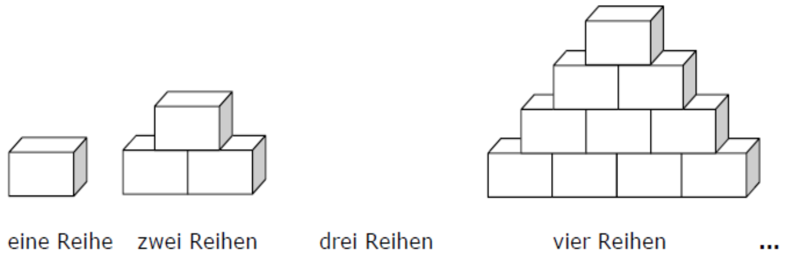
f) Vgl. BLF 2012 Wahlaufgabe 2.a)

Der Graph einer linearen Funktion f verläuft durch die Punkte $P(0;1)$ und $Q(8;0{,}5)$.
Gib eine Gleichung der Funktion f an.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

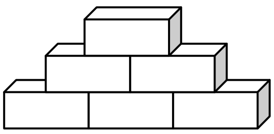
$$y = mx + n$$
$$n = 1$$
$$y = -\frac{1}{16}x + 1$$

Ma (12)
a) Maria baut mehrere Treppen aus Steinen nach einem bestimmten Muster.



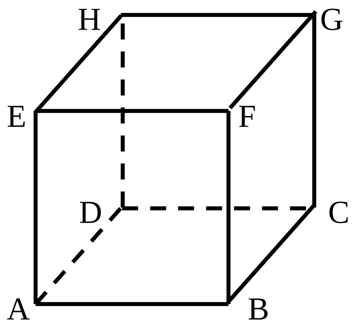
Skizziere die fehlende Treppe aus drei Reihen.

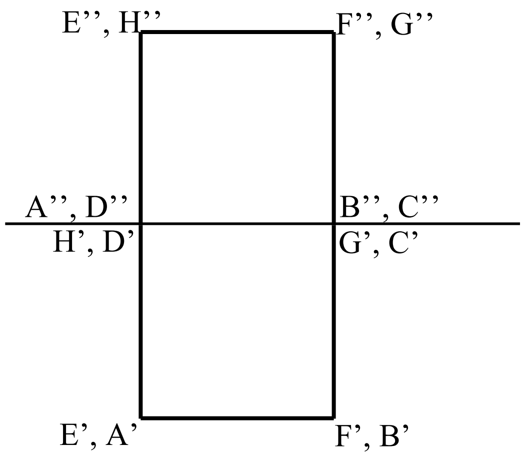
Erwartete Dokumentation:



b) **Skizziere** das Schräg- und Zweitafelbild eines Körpers, bei dem Grund- und Aufriss gleich aussehen.

Erwartete Dokumentation, z. B.:





Ma (13)
a) **Untersuche**, ob aus den folgenden Stücken ein Dreieck ABC konstruierbar ist.
a = 6,8 cm, b = 4,7 cm, c = 2,0 cm
Stelle deine Überlegungen nachvollziehbar dar.

Erwartete Dokumentation, z. B.:
Da $b + c < a$ gilt, ist die Dreiecksungleichung nicht erfüllt und somit das Dreieck ABC nicht konstruierbar.

b) Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$.

Untersuche den Graphen von f auf Symmetrie sowie auf Schnittpunkte mit der x-Achse, auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:
Symmetrie: punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 4}{2 \cdot (-x)}$$

$$f(-x) = -\frac{x^2 + 4}{2 \cdot x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$x^2 + 4 = 0$ → keine Lösung

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$

$$f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{12}{x^4}$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$x_{E1} = -2$ $\quad f''(-2) = -\frac{1}{2} < 0$ → lokales Maximum $H(-2; -2)$

$x_{E2} = 2$ $\quad f''(2) = \frac{1}{2} > 0$ → lokales Minimum $T(2; 2)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$
keine Lösung

c) Für jede reelle Zahl k ist eine Funktion f_k mit der Gleichung $f_k(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + k}$ gegeben.

Untersuche die Graphen der Funktionen f_k auf die Anzahl der Nullstellen und der Polstellen in Abhängigkeit von k.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

$x^2 - 2x = 0$

zwei Nullstellen für $k \neq 0$ und $k \neq 2$: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$

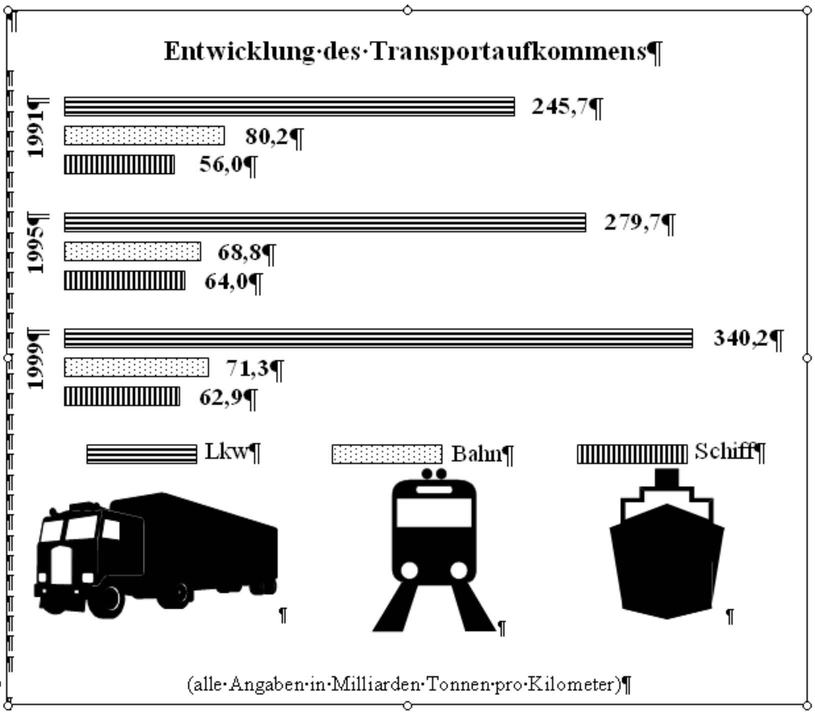
eine Nullstelle für $k = 0$: $x = 2$

eine Nullstelle für $k = 2$: $x = 0$

Ma (14)

Die Grafik zeigt die Anteile verschiedener Transportmittel an der Lieferung von Frachten aller Art.

Vergleiche die Anteile des Transportaufkommens durch die drei Transportmittel anhand der Grafik in den angegebenen Jahren.



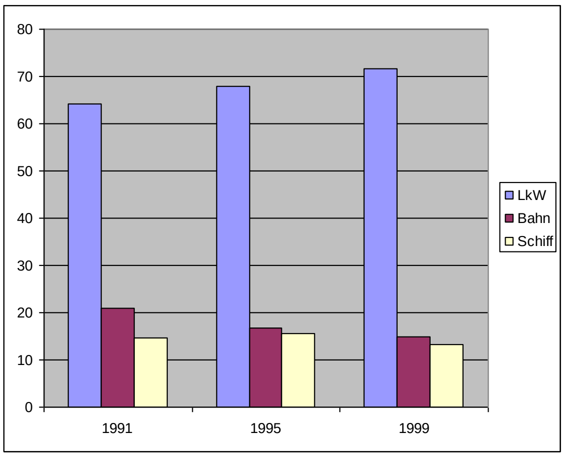
Quelle: nach VDA/IFO-Institut in AUTO/Straßenverkehr, Heft 23, 08.11.2000

Erwartete Dokumentation, z. B.:

- Berechnung der prozentualen Anteile

	1991	1995	1999
LkW	64,3 %	67,8 %	71,7 %
Bahn	21,0 %	16,7 %	15,0 %
Schiff	14,7 %	15,5 %	13,3 %

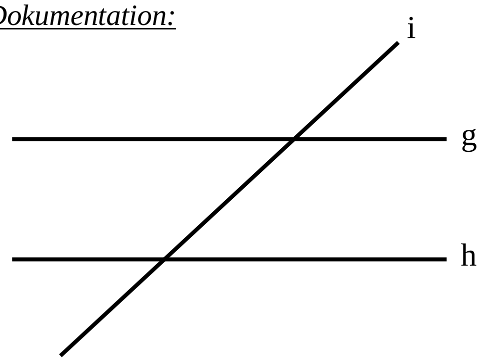
- grafische Darstellung



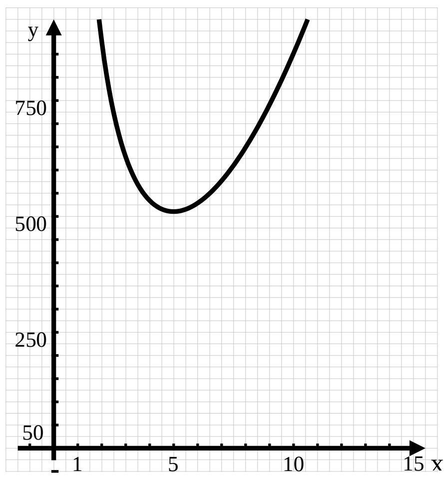
- Lkw haben größten Anteil des Transportaufkommens in den drei Jahren
- der prozentuale Anteil der Lkw am Transportaufkommen nimmt zu
- der prozentuale Anteil der Bahn am Transportaufkommen nimmt ab
- der prozentuale Anteil vom Schiff am Transportaufkommen bleibt annähernd konstant

Ma (15)
Zeichne drei Geraden so, dass genau zwei Schnittpunkte entstehen.

Erwartete Dokumentation:



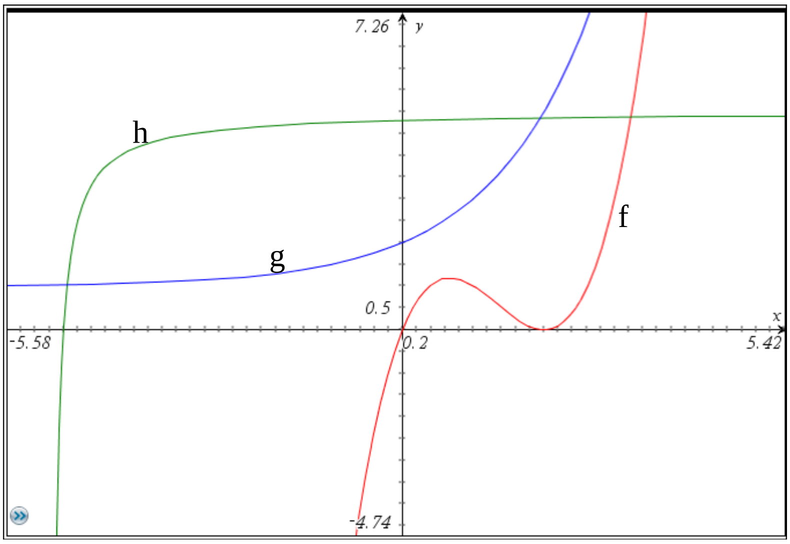
Ma (16)
Lisa hilft ihrem Vater, Dosen verschiedener Größe in ein Regal zu räumen.
Anschließend überlegt sie: „Das zu verpackende Produkt, die Standfestigkeit, die Stapelbarkeit und die zur Verfügung stehende Fläche zur Beschriftung sind Kriterien für die Abmessungen einer Dose. Am Wichtigsten ist ein geringer Materialverbrauch. ...“
Sie berechnet mit einem Tabellenkalkulationsprogramm Radius und Oberfläche für Dosen mit jeweils 850 ml Volumen mit verschiedenen Höhen.
Interpretiere die von Lisa ermittelten Daten.



Die Dokumentation muss folgende Aspekte enthalten:

- Werte vergleichen, Schlussfolgerung für minimale Oberfläche bei einem Radius von 5,20 cm
- Erstellen einer Tabelle mit TK, Radius im Intervall $4{,}0\,\text{cm} \le x \le 6{,}0\,\text{cm}$
- Darstellung der Daten im Diagramm

Ma (17)



Analysiere anhand der Graphen der Funktionen f, g und h, ob die Werte der ersten und zweiten Ableitungen dieser Funktionen positiv, negativ oder null sind.

Die Dokumentation muss folgende Aspekte enthalten:

- Graph der Funktion g: Tangenten im gesamten Bereich für wachsende x-Werte immer größer werdender Anstieg,
  zweite Ableitung von g daher im gesamten dargestellten Bereich positiv,
  → dies nicht für die Funktionen f und h zutreffend
- Graph der Funktion f: Tangenten für $x < 0{,}6$ (Näherungswert) ansteigend, dann bis $x = 2$ fallend und danach wieder ansteigend,
  erste Ableitung von f ändert daher an beiden angegebenen Stellen ihr Vorzeichen
- erste Ableitungen der Funktionen g und h im dargestellten Bereich positiv, da alle Tangenten an die Graphen ansteigend
- Graph der Funktion f: bei $x = 1{,}2$ (Näherungswert) Wendepunkt,
  daher ändert die zweite Ableitung von f beim Durchlauf von 1,2 ihr Vorzeichen
- Graph der Funktion h: stets unterhalb der Tangenten,
  zweite Ableitung von h daher negativ
- Graph der Funktion g: stets oberhalb der Tangenten,
  zweite Ableitung von g ist stets positiv

Ma (18)

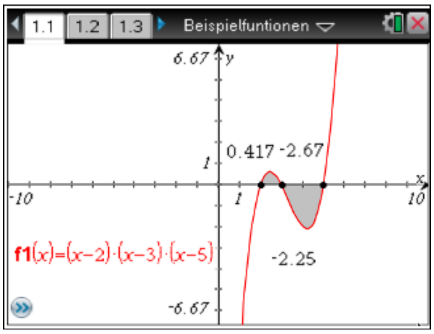
Eva sagt zu Paul: „Die Fläche zwischen Funktion und Abszissenachse von 2 bis 5 ist ganz einfach zu bestimmen. Nur bestimmtes Integral von 2 bis 5.“ Darauf sagt Paul: „Ich denke, das gilt nicht immer so.“

Beurteile die mathematischen Äußerungen an Hand von drei selbst gewählten Beispielen.

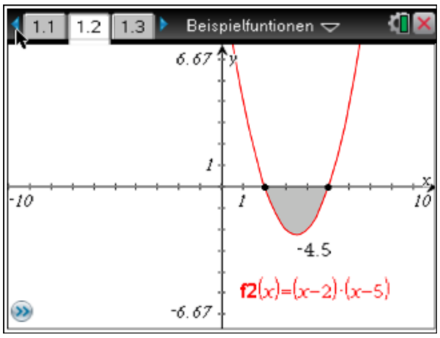
Die Dokumentation muss folgende Aspekte enthalten:

- drei Beispiele: Angabe der Funktionsgleichung, Skizze, mit Erläuterung
- Gesamturteil zur Aussage

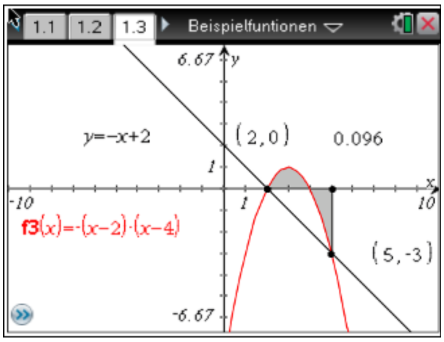
Bsp. 1:



Bsp. 2:



Bsp. 3:



Ma (19)
Erläutere den Einfluss der Parameter a, d und e auf die Graphen der Funktionen $g_{a,d,e}(x) = a \cdot f(x+d) + e$ an mindestens zwei Funktionsklassen.

Die Dokumentation muss folgende Aspekte enthalten:

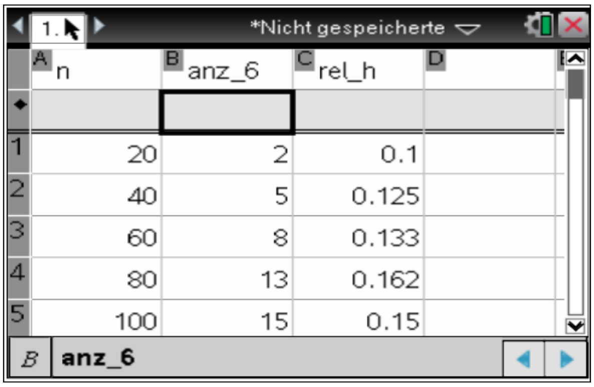
Funktionsklasse	D	a	e
allgemein	Verschiebung des Graphen der Funktion $y = f(x)$ in Richtung der x-Achse um -d	$\lvert a\rvert > 1$ Streckung des Graphen von $y = f(x+d)$ $0 < \lvert a\rvert < 1$ Stauchung des Graphen von $y = f(x+d)$ $\lvert a\rvert = 1$ Graph von $y = f(x+d)$ $a < 0$ zusätzlich Spiegelung des Graphen $y = \lvert a\rvert \cdot f(x+d)$ an der x-Achse	Verschiebung des Graphen von $y = a \cdot f(x+d)$ in Richtung der y-Achse um e
Quadratische Funktionen $f(x) = a \cdot (x+d)^2 + e$	Verschiebung des Graphen der Funktion $y = f(x) = x^2$ in Richtung der x-Achse um –d Scheitelpunkt der Parabel $S(-d;\ e)$	$\lvert a\rvert > 1$ gestreckte Parabel $0 < \lvert a\rvert < 1$ gestauchte Parabel $\lvert a\rvert = 1$ verschobene Normalparabel $a > 0$ Parabel nach oben geöffnet $a < 0$ Parabel nach unten geöffnet	Verschiebung des Graphen von $y = a \cdot f(x+d)$ in Richtung der y-Achse um e Scheitelpunkt der Parabel $S(-d;\ e)$
Wurzelfunktionen $f(x) = a \cdot \sqrt{x+d} + e$	Verschiebung des Graphen der Funktion $y = f(x) = \sqrt{x}$ in Richtung der x-Achse um –d Definitionsbereich: $x \in R;\ x \geq -d$	$\lvert a\rvert > 1$ Streckung des Graphen von $f(x) = \sqrt{x+d}$ $0 < \lvert a\rvert < 1$ Stauchung des Graphen von $f(x) = \sqrt{x+d}$ $\lvert a\rvert = 1$ Graph von $f(x) = \sqrt{x+d}$ $a < 0$ zusätzlich Spiegelung des Graphen $f(x) = \lvert a\rvert \cdot \sqrt{x+d}$ an der x-Achse	Verschiebung des Graphen der Funktion $f(x) = a \cdot \sqrt{x+d}$ in Richtung der y-Achse um e $a > 0$ Wertebereich: $y \in R;\ y \geq e$ $a < 0$ Wertebereich: $y \in R;\ y \leq e$

Ma (20)

Würfle 100-mal mit einem Spielwürfel. Ermittle nach jeweils 20 Würfen die Anzahl der gewürfelten „Sechsen" sowie die relative Häufigkeit für das Auftreten dieser Augenzahl.
Protokolliere deine Ergebnisse.

Die Dokumentation muss folgende Aspekte enthalten:

- Angabe der Anzahl der Würfe und der Sechsen
- Angabe der zugehörigen relativen Häufigkeit für das Auftreten der Sechsen



	A n	B anz_6	C rel_h	D
◆				
1	20	2	0.1	
2	40	5	0.125	
3	60	8	0.133	
4	80	13	0.162	
5	100	15	0.15	

Ma (21)

Entscheide, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuze entsprechend an.

	wahr	falsch
Das Rechteck ist ein Parallelogramm.	☐	☐
Jedes rechtwinklige Dreieck ist gleichschenklig.	☐	☐
Der Quader ist ein Prisma.	☐	☐

Erwartete Dokumentation:

	wahr	falsch
Das Rechteck ist ein Parallelogramm.	X	☐
Jedes rechtwinklige Dreieck ist gleichschenklig.	☐	X
Der Quader ist ein Prisma.	X	☐

Ma (22)

Prüfe, ob der Punkt $P(5;\,5)$ auf dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = -2x + 5$ liegt.

Erwartete Dokumentation, z. B.:

$f(5) = -2 \cdot 5 + 5 = -5$

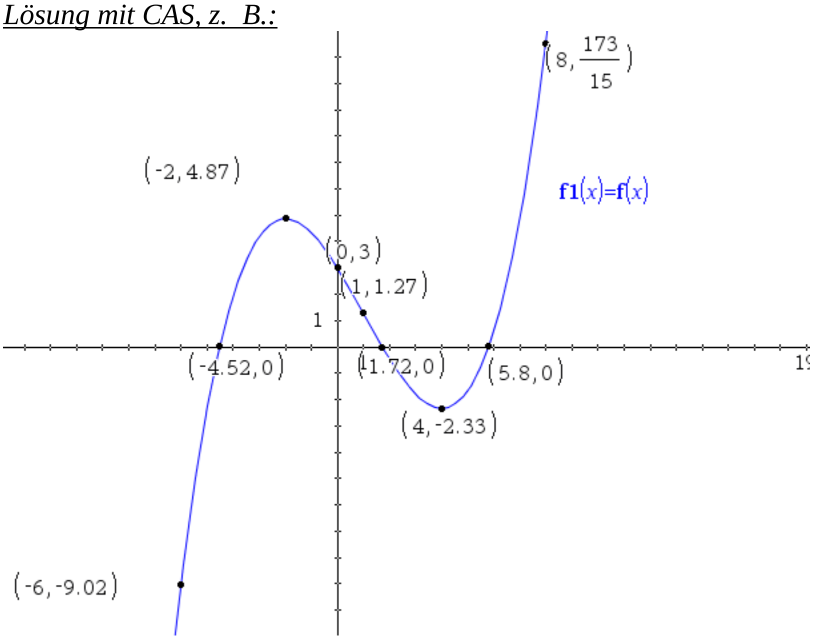
Der Punkt $P(5;\,5)$ liegt nicht auf dem Graphen von f.

Ma (23)

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{15}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 3$ mit $x \in R$.

a) **Untersuche** den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, lokale Extrempunkte, Wendepunkte. **Gib** gegebenenfalls deren Koordinaten an.

Lösung mit CAS, z. B.:



$f(x):=\frac{1}{15}\cdot x^3-\frac{1}{5}\cdot x^2-\frac{8}{5}\cdot x+3$	*Fertig*
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$\frac{x^2}{5}-\frac{2\cdot x}{5}-\frac{8}{5}$
$a1f(x):=\frac{x^2}{5}-\frac{2\cdot x}{5}-\frac{8}{5}$	*Fertig*
$\frac{d}{dx}(a1f(x))$	$\frac{2\cdot x}{5}-\frac{2}{5}$
$a2f(x):=\frac{2\cdot x}{5}-\frac{2}{5}$	*Fertig*
$\frac{d}{dx}(a2f(x))$	$\frac{2}{5}$
$a3f(x):=\frac{2}{5}$	*Fertig*
$\text{solve}(f(x)=0,x)$	$x=-4.51757$ or $x=1.71738$ or $x=5.8001$'
$f(0)$	3
$\text{solve}(a1f(x)=0,x)$	$x=-2$ or $x=4$
$a2f(-2)$	$\frac{-6}{5}$
$f(-2)$	$\frac{73}{15}$
$a2f(4)$	$\frac{6}{5}$
$f(4)$	$\frac{-7}{3}$

solve(a2f(x)=0,x)	x=1
a3f(1)	$\frac{2}{5}$
f(1)	$\frac{19}{15}$

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$f(x)=0$ → $P_{x1}(-4{,}52;0)$, $P_{x2}(1{,}72;0)$, $P_{x3}(5{,}80;0)$

$x=0$ → $P_y(0;3)$

Hinweis: Die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse wurden gerundet. Die Angabe der exakten Werte wäre hier nicht sinnvoll.

Ableitungen:

$$f'(x)=\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}$$

$$f''(x)=\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}$$

$$f'''(x)=\frac{2}{5}$$

Extrempunkte: $f'(x)=0$

$x_{E1}=-2$ $f''(-2)=-\frac{6}{5}<0$ → lokales Maximum $H\left(-2;\frac{73}{15}\right)$

$x_{E2}=4$ $f''(4)=\frac{6}{5}>0$ → lokales Minimum $T\left(4;-\frac{7}{3}\right)$

Wendepunkt: $f''(x)=0$

$x_W=1$ $f'''(1)=\frac{2}{5}\neq 0$ → $W\left(1;\frac{19}{15}\right)$

b) **Skizziere** den Graphen von f im Intervall $-6\leq x\leq 8$.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:
In der Skizze müssen wesentliche Eigenschaften (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte) der Funktion deutlich werden. Der Graph der Funktion muss mindestens im angegebenen Intervall skizziert sein.

c) Der Graph der Funktion f hat an einer Stelle den kleinsten Anstieg.
Gib diese Stelle an und **begründe** deine Entscheidung.

Erwartete Dokumentation, z. B.:
Der Graph der Funktion hat an der Wendestelle $x_W = 1$ den kleinsten Anstieg, denn hier liegt ein Minimum der Ableitungsfunktion vor, da $f'''(1) = \frac{2}{5} > 0$.

d) **Bestimme** eine Gleichung der Wendetangente an den Graphen von f.
Ermittle die Anzahl der Tangenten an den Graphen von f, die die Wendetangente senkrecht schneiden.

Lösung mit CAS, z. B.:

$\text{tangentLine}(f(x),x,1)$	$\frac{46}{15}-\frac{9\cdot x}{5}$
$m1:=\frac{-9}{5}$	$\frac{-9}{5}$
$\frac{-1}{m1}$	$\frac{5}{9}$
$\text{solve}\left(a1f(x)=\frac{5}{9},x\right)$	$x=\frac{-(\sqrt{106}-3)}{3}$ or $x=\frac{\sqrt{106}+3}{3}$
$\text{solve}\left(a1f(x)=\frac{5}{9},x\right)$	$x=-2.43188$ or $x=4.43188$

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

Tangentengleichung: $t(x) = -\frac{9}{5}x + \frac{46}{15}$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{5}{9}$$

$f'(x) = \frac{5}{9}$ für $x_1 \approx -2{,}43$ und $x_2 \approx 4{,}43$

Also gibt es zwei zur Wendetangente rechtwinklige Tangenten.

e) Gegeben ist eine Gerade mit der Gleichung $y = c \quad (c \in R)$.
Gib die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Graphen von f in Abhängigkeit von c an.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

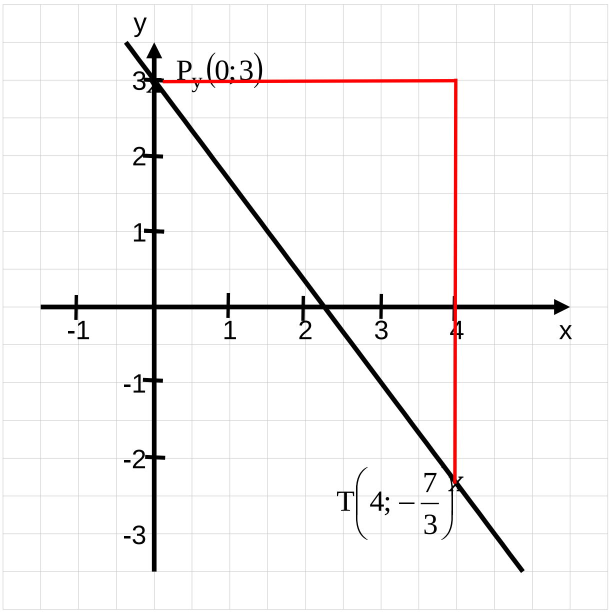
ein Schnittpunkt für $c < -\frac{7}{3}$ und für $c > \frac{73}{15}$

zwei Schnittpunkte für $c = -\frac{7}{3}$ und für $c = \frac{73}{15}$

drei Schnittpunkte für $-\frac{7}{3} < c < \frac{73}{15}$

f) Der Graph einer linearen Funktion verläuft durch die Punkte R(0; f(0)) und S(4; f(4)).
Ermittle eine Gleichung dieser Funktion.

Erwartete Dokumentation, z. B. zeichnerisch:



$$m=-\frac{\left(3+\frac{7}{3}\right)}{4}=-\frac{4}{3}$$

$$g(x)=-\frac{4}{3}x+3$$

Lösung mit CAS, z. B.:

$g(x):=m\cdot x+n$	*Fertig*
$\text{solve}\left(\begin{cases} g(0)=f(0) \\ g(4)=f(4)\end{cases},\{m,n\}\right)$	$m=\frac{-4}{3}$ and $n=3$
$g(x):=\frac{-4}{3}\cdot x+3$	*Fertig*

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS, z. B.:

$g(x)=mx+n$ mit $g(0)=f(0)$ und $g(4)=f(4)$

$$g(x)=-\frac{4}{3}x+3$$

g) Das von der Gerade $g(x) = -\frac{4}{3}x + 3$ und den Koordinatenachsen eingeschlossene Dreieck rotiert um die x-Achse.
Berechne das Volumen des entstehenden Körpers.

Lösung mit CAS, z. B.:

$g(x):=\frac{-4}{3}\cdot x+3$	*Fertig*
$\text{solve}(g(x)=0,x)$	$x=\frac{9}{4}$
$r:=3$	3
$h:=\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$
$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$	$\frac{27\cdot\pi}{4}$
$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$	21.2058

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

$g(x) = -\frac{4}{3}x + 3$

$g(0) = r \qquad 0 = -\frac{4}{3}\cdot h + 3$

$r = 3 \qquad h = \frac{9}{4}$

$V = \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$

$V = \frac{27}{4}\pi \text{ VE} \approx 21{,}2 \text{ VE}$

h) Durch die Punkte $M(4;0)$, $N(-2;0)$ und $P(0;3)$ verläuft der Graph einer quadratischen Funktion.
Bestimme eine Gleichung dieser Funktion.
Zeichne den Graphen dieser Funktion ins Koordinatensystem von Aufgabenteil b) ein.

Erwartete Dokumentation bei Verwendung von CAS:

$q(x) = ax^2 + bx + c$

$q(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$

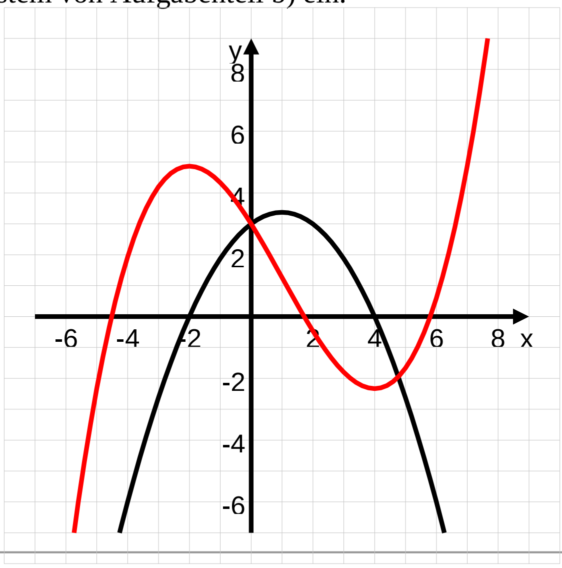
Oder durch quadratische Regression:

$q(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$, da

$q(-2) = 0$

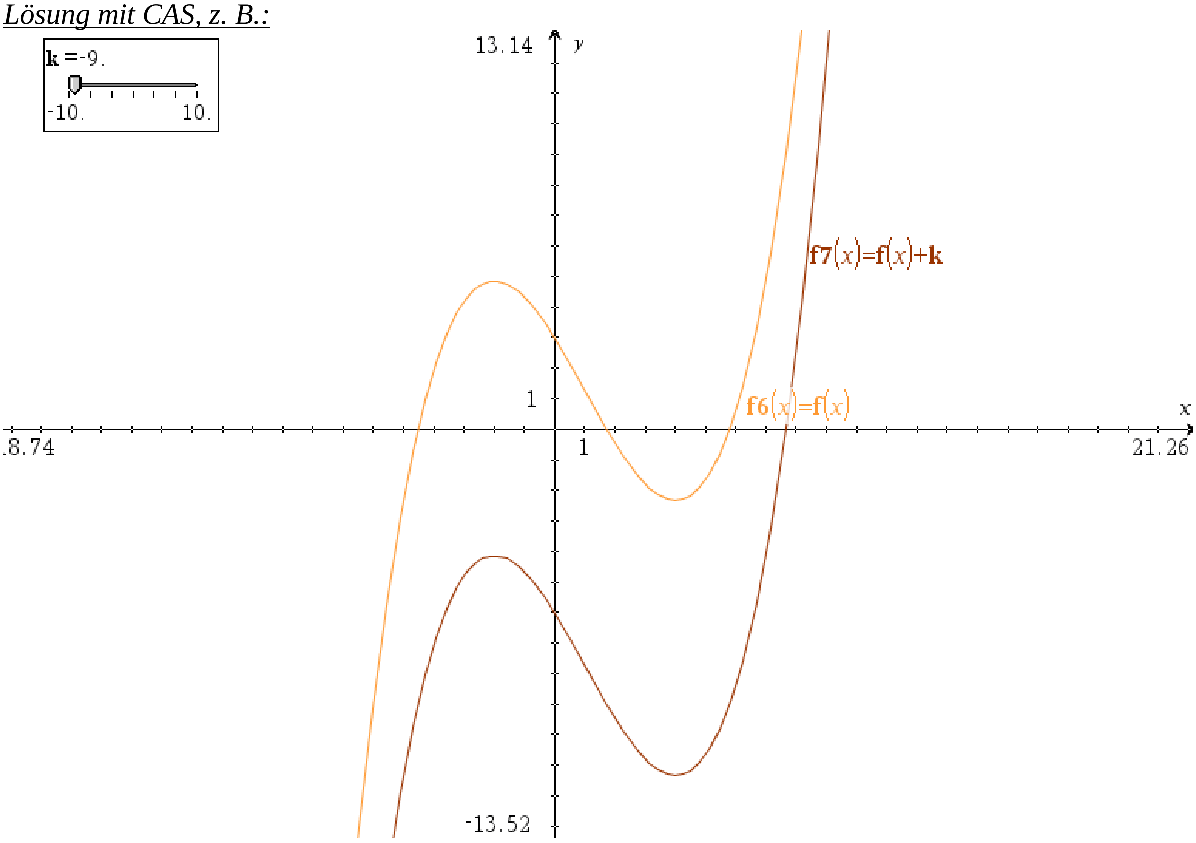
$q(0) = 3$

$q(4) = 0$



i) Für jede reelle Zahl a ist eine Funktion g_a durch $g_a(x) = f(x) + a$ gegeben.
Beschreibe den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf des Graphen von g_a im Vergleich zum Graphen von f.
Gib einen Wert für a so an, dass der Graph von g_a genau eine Nullstelle hat.

Lösung mit CAS, z. B.:



Die Dokumentation muss folgende Aspekte enthalten:

- Beschreibung in vollständigen Sätzen
- Verschiebung um a Einheiten in Richtung y-Achse
- für $a > 0$ Verschiebung nach oben, für $a < 0$ Verschiebung nach unten
- z. B. $a = -9$