Lösungshinweise zu Arbeitsblatt 4
Mathematik (Quadratische Funktionen)

Um Fotos gut zu gestalten und den besten Bildausschnitt zu wählen, wendet man das Verfahren des Goldenen Schnittes an.
In den Goldenen Punkt legt man besonders zu betonende Objekte. Der so genannte Goldene Punkt entsteht, wenn beide Rechteckseiten im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt werden.
Als groben Näherungswert teilt man die Abmessungen des Bildes im Verhältnis 1 : 2.

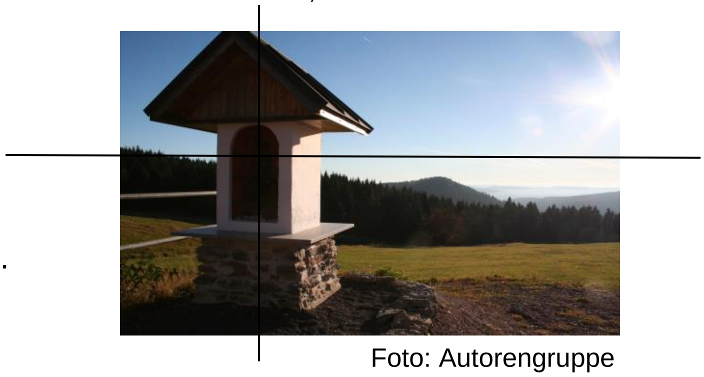
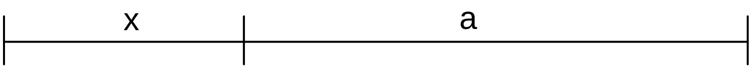


Foto: Autorengruppe

Als Goldenen Schnitt versteht man die Teilung einer Strecke nach folgendem Prinzip:
Das Verhältnis der Länge der kleinen Teilstrecke zur größeren entspricht dem Verhältnis der größeren Teilstrecke zur Länge der Gesamtstrecke.



1. Formen Sie die Proportion händisch in die entsprechende quadratische Gleichung um und lösen Sie diese mit CAS.
   Bestimmen Sie die Werte des Teilverhältnisses x : a oder a : x.
   Geben Sie Näherungswerte an. Beschreiben Sie Auffälligkeiten der rationalen Näherungswerte.
2. Konstruieren Sie den Goldenen Schnitt einer Strecke nach folgender Beschreibung (Geometriefenster):
   a. Konstruieren Sie eine Strecke $\overline{AB}$.
      Errichten Sie im Punkt B auf der Strecke $\overline{AB}$ eine Senkrechte.
      Tragen Sie auf der Senkrechten eine Strecke $\overline{BD}$ mit der Länge $\frac{\overline{AB}}{2}$ ab (mit Hilfe eines Kreises).
      Zeichnen Sie das Dreieck ABD.
      Zeichnen Sie den Kreis um D mit der Länge $\frac{\overline{AB}}{2}$.
      Dieser schneidet die Seite AD in G.
      Zeichnen Sie einen Kreis um A mit der Länge AG.
      Dieser schneidet AB im Punkt H, der die Seite AB im Goldenen Schnitt teilt.
   b. Ermitteln Sie mittels Formelterm das Teilverhältnis der Länge der kleineren Teilstrecke zur Länge der größeren Teilstrecke (Goldener Schnitt) sowie das Reziproke dieses Verhältnisses.
   c. Verändern Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$ durch Ziehen eines Endpunktes. Formulieren Sie Aussagen über die oben beschriebenen Teilverhältnisse.
   d. Beweisen Sie mit dem Satz des Pythagoras, dass
      $\overline{AH} = b = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot a \approx 0{,}618 \cdot a$, wobei c die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ist (Main-Fenster). Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1.

Lösungen:

1.

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x+a}$$

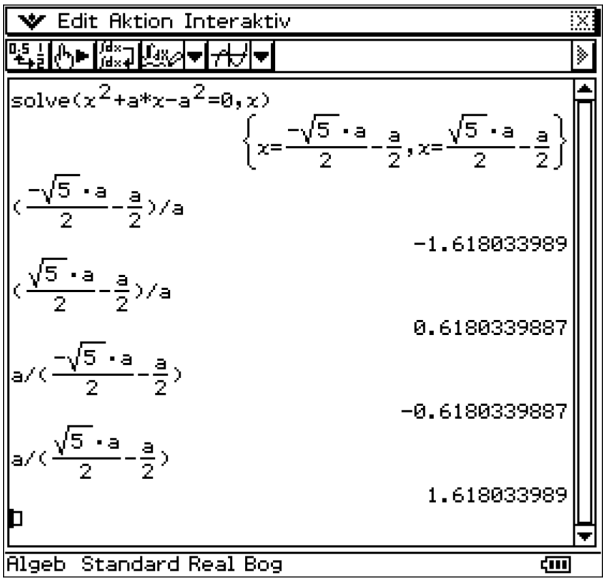
$$x \cdot (x+a) = a^2$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$

$$x_{1;2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

$$x_{1;2} = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a$$



2.

$$\left(x + \frac{s}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + s^2$$

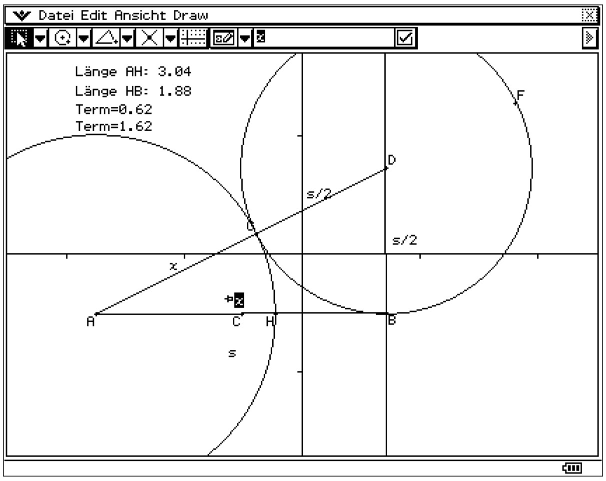
$$x^2 + x \cdot s + \frac{s^2}{4} = \frac{s^2}{4} + s^2$$

$$x^2 + x \cdot s - s^2 = 0$$

$$x_{1;2} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} + s^2}$$

$$x_{1;2} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{5s^2}{4}}$$

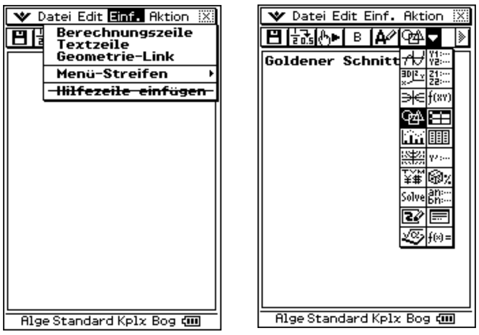
$$x_{1;2} = \left(\frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2}\right) \cdot s$$



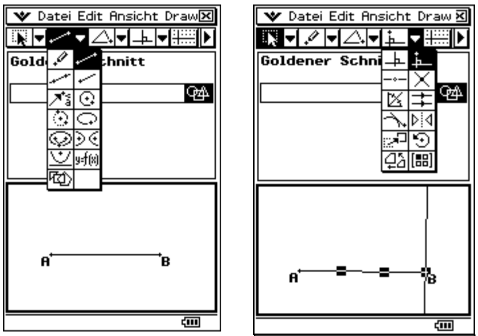
$$x_1 = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \cdot s; \quad x_2 \text{ entfällt}$$

$$\frac{x_1}{s} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

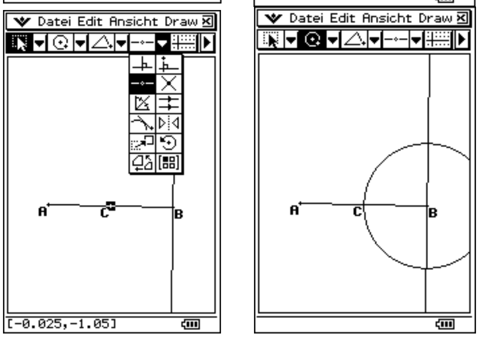
Hinweise zur Arbeit mit dem ClassPad
Erstellen Sie günstig ein e-Activity, um Konstruktion und Berechnungen in einer Datei speichern zu können.
Texte sind unter Einf./Textzeile einzugeben.
Die Konstruktion erfolgt im Geometriefenster.



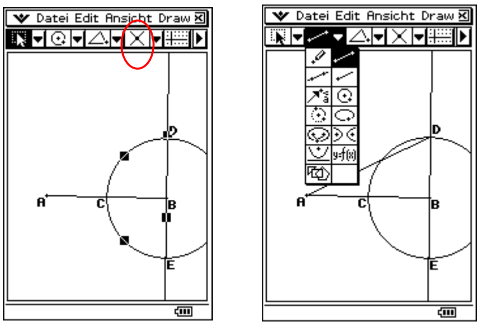
Zeichnen Sie die Strecke $\overline{AB}$.
Errichten Sie auf $\overline{AB}$ in B die Senkrechte (Punkt und Strecke vorher markieren).



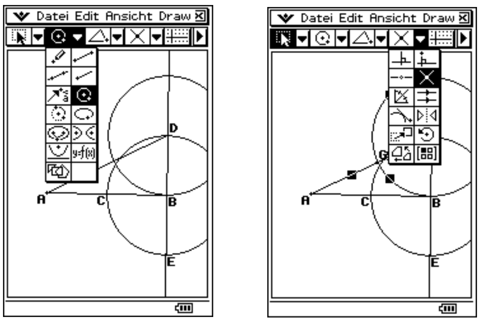
Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ (vorher Strecke markieren).
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$.



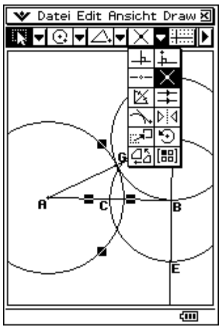
Bestimmen Sie D als Schnittpunkt von Kreis und Senkrechte (vorher markieren und Symbol 4 wählen)und verbinden Sie zum Dreieck ABD.

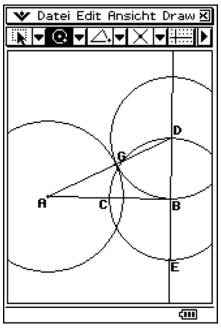


Zeichnen Sie einen Kreis um D mit dem Radius $\overline{BD}$ und bestimmen Sie den Schnittpunkt G des Kreises mit der Strecke $\overline{AD}$.

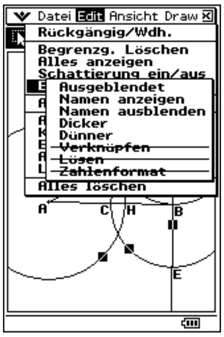


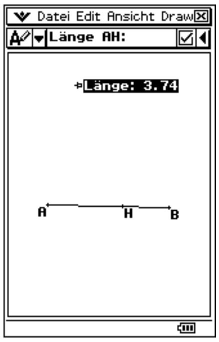
Übertragen Sie die Länge der Strecke $\overline{AG}$ mittels Kreis um A mit dem Radius $\overline{AG}$ auf die Strecke $\overline{AB}$.
Der Schnittpunkt des Kreises um A mit der Strecke $\overline{AB}$ ist der Punkt H.



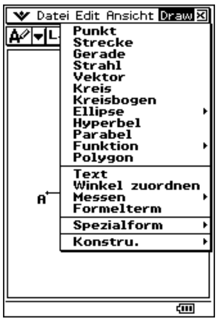


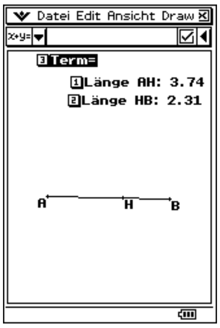
Alle Hilfslinien können markiert und über Edit/Ausgeblendet ausgeblendet werden.
Die Längen der Strecken $\overline{AH}$ und $\overline{HB}$ sind im Messfeld (Pfeil nach rechts in Symbolleiste zum Umschalten zum Messfeld) zu messen und die Ergebnisse markiert in das Fenster zu ziehen.



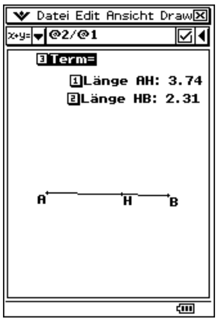


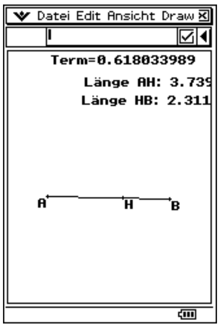
Über Draw/Formelterm kann der Quotient der Längen der beiden Strecken durch Anklicken der Zahlen vor den Längen und Eingabe des Operationszeichens berechnet werden.



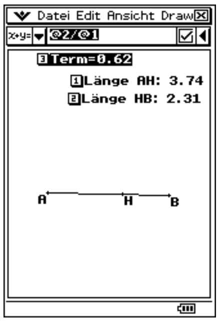


Dabei erfolgt die Anzeige @2/@1 und nach der Bestätigung mit der Taste EXE wird der Formelterm berechnet.

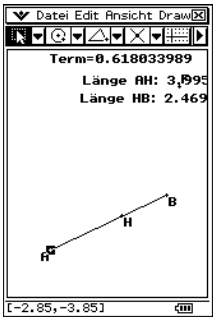


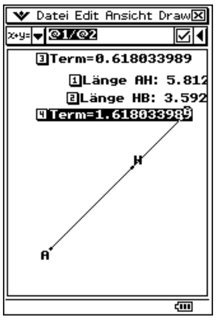


Unter Einstellungen/Geometrieformat kann die Genauigkeit des Ergebnisses erhöht werden.

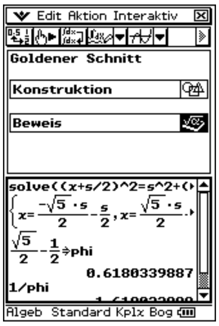


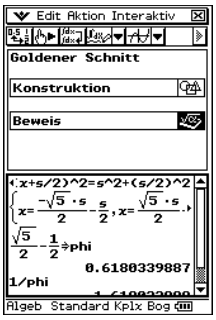
Die Endpunkte A oder B können markiert und dann durch Ziehen verändert werden.
Der berechnete Quotient ändert sich nicht.
Als Formelterm kann man auch das Reziproke des Quotienten mit $\frac{@1}{@2}$ bilden, wobei im Beispiel die Strecke AH die längere Teilstrecke ist. Beide Quotienten sind in den Nachkommastellen identisch. Ebenfalls kann man bestätigen, dass die Länge der Gesamtstrecke zur Länge der größeren Teilstrecke das gleiche Verhältnis ergibt wie die Länge der größeren Teilstrecke zur Länge der kleineren.



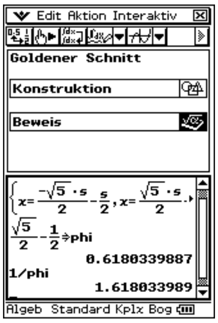


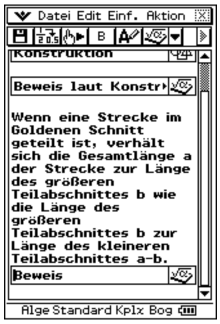
Der Beweis über den Satz des Pythagoras zum rechtwinkligen Dreieck ABD kann über das Lösen der entsprechenden quadratischen Gleichung der Form $(x+s)^2 = s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$ erfolgen, wobei s die Länge der Seite $\overline{AB}$, $\frac{s}{2}$ die Länge der Seite $\overline{AD}$ und x + s die Länge der Seite $\overline{AD}$ ist. Laut Konstruktion überträgt man die Länge x auf die Strecke $\overline{AH}$.





Die Lösungen erhält man in Abhängigkeit von s.
Der Zahlenwert ergibt die Lösung für phi, dem Teilverhältnis Länge der kleineren zur Länge der größeren Strecke.
Auch aus der Erkenntnis der Gleichheit der Teilverhältnisse kann die Lösung über eine quadratische Gleichung ermittelt werden.





$$\Phi = \frac{1}{\rho}$$

$$\Phi = \frac{M}{m} = \frac{m+M}{M} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$\Phi \approx 1{,}618$$