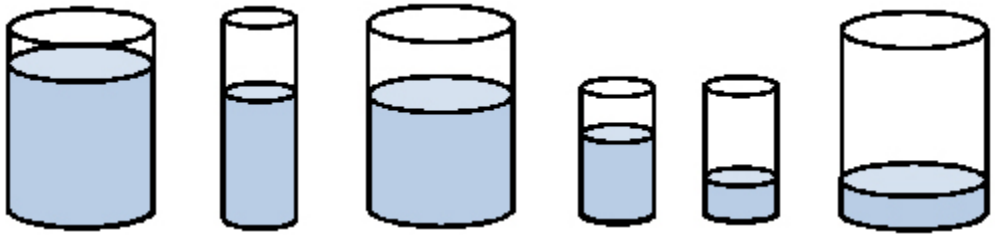
LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG



Lebendige Stützpunktvorstellungen im Spannungsfeld von Vergleichen, Wissen, Messen und Schätzen

LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Übersicht

Die didaktische Stufenfolge kritisch betrachtet

Größenverständnis als Kompetenz

Anregungen zum Aufbau von Stützpunktvorstellungen

LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Die didaktische Stufenfolge kritisch betrachtet

Die didaktische Stufenfolge

??? GRÖSSENVORSTELLUNGEN ???

- Erfahrungen sammeln und aufgreifen: Sach-, Spiel- und Alltagssituationen
- Direktes Vergleichen von Repräsentanten
- Indirektes Vergleichen von Repräsentanten
  - mit Hilfe selbst gewählter Maßeinheiten
  - mit Hilfe standardisierter Maßeinheiten durch Messen mit verschiedenen Messgeräten
- Umwandeln: Verfeinern und Vergröbern der Maßeinheiten
- Rechnen und Anwenden

Kritische Anmerkungen zur didaktischen Stufenfolge

- Konzeptionell-empirische Kritik: Das Größenverständnis ist netzartig strukturiert und nicht linear aufgebaut
  - Vorerfahrungen bestehen zu verschiedenen Aspekten –
    Kinder können und wissen mehr, als wir denken.
  - Prozessbewältigung bedeutet nicht Verständnis –
    Kinder können und wissen gleichzeitig weniger, als wir denken.
  - Verständnisaufbau ist ein vielschichtiger und langandauernder Prozess –
    Kinder bauen ihr Größenverständnis nur wenig über Analogien auf.
- Methodische Kritik: Stufenfolge als Instruktionsabfolge entspricht nicht dem modernen Lernverständnis
  - Vorerfahrungen werden i.d.R. nicht eruiert und bewusst aufgegriffen.
  - Unterrichtseinheiten sind isoliert und kurz und werden wenig vernetzt.
  - Zu früh findet rein abstrakt-rechnerisches Arbeiten statt.
  - Kaum aktiv-entdeckendes Lernen und sozial-konstruktives Aushandeln feststellbar.

LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Größenverständnis als Kompetenz

Größenverständnis als Kompetenz

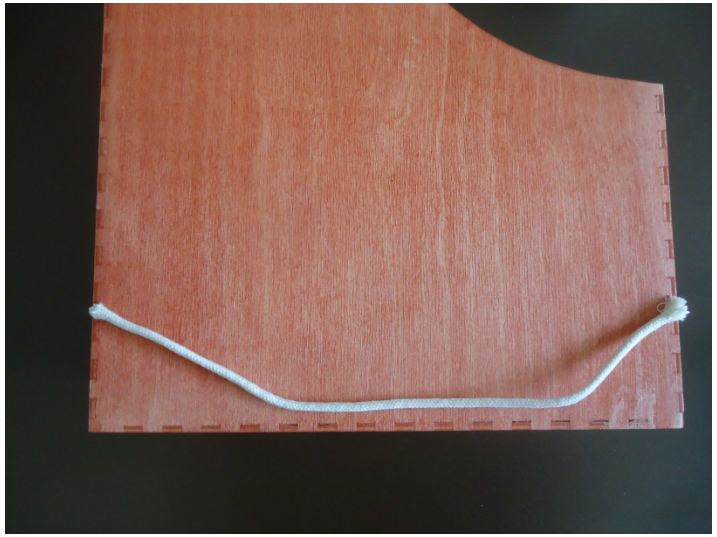
- Kompetenzorientiertes Verständnis: Stützpunktvorstellungen sollen handlungswirksam in Alltags- und Anforderungssituationen sein
  - Wissensaspekte des Größenverständnisses: insbesondere Stützpunktwissen und dessen Beziehungshaltigkeit als Produkt von Vorstellungen

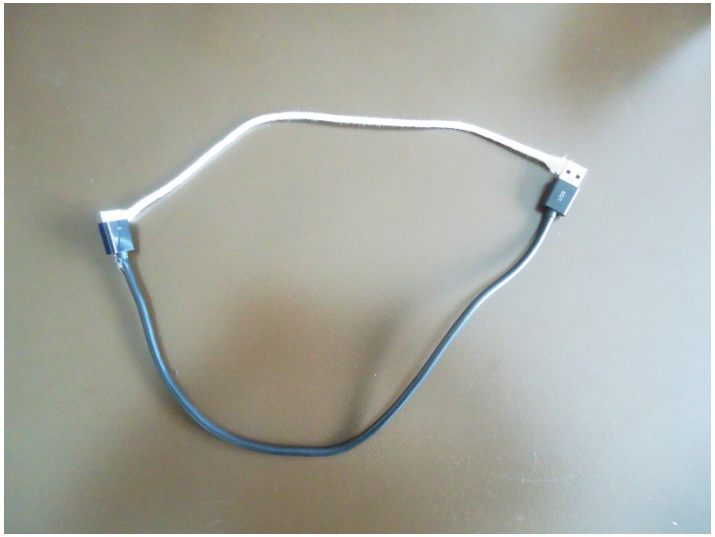
Verschiedene Wissensarten beim Messen

- Experimentell erfahrbares Wissen
  - Beobachtbare Handlungen anderer können
  - ⇨ nachgeahmt, aber auch entsprechend korrigiert werden.
- Auf Konventionen beruhendes Wissen
  - Sozial konstruierte Vereinbarungen: Aufbau von Skalen,
  - ⇨ Strukturierung der SI-Einheiten, …
- Logisch erschließbares Wissen
  - Eigenschaften der Klassifikation und Ordnungsrelation, z.B. Disjunktivität, Transitivität
  - Zusammenhang von Skalen- und Maßzahlaspekt; Operationen mit Größen

Verschiedene Wissensarten beim Messen

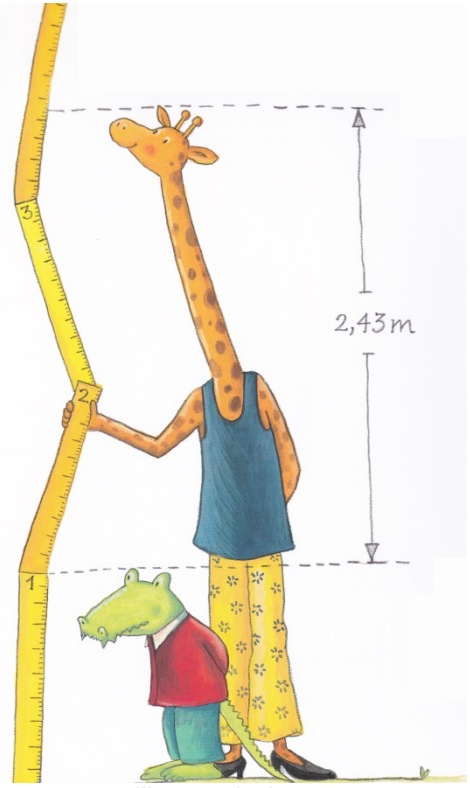
- Experimentell erfahrbares Wissen
  - Beobachtbare Handlungen anderer können nachgeahmt, aber auch entsprechend korrigiert werden
    - Der Faden muss immer ganz gespannt sein





Verschiedene Wissensarten beim Messen

- Experimentell erfahrbares Wissen
  - Beobachtbare Handlungen anderer können nachgeahmt, aber auch entsprechend korrigiert werden
    - Der Zollstock muss aber gerade aufgeklappt werden.

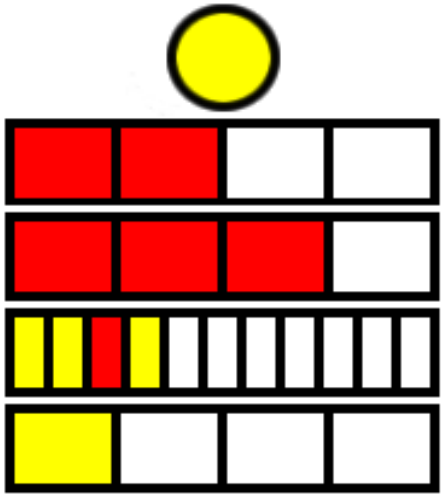


Verschiedene Wissensarten beim Messen

- Experimentell erfahrbares Wissen
  - Beobachtbare Handlungen anderer können nachgeahmt, aber auch entsprechend korrigiert werden
    - Der Faden muss immer ganz gespannt sein
    - Der Zollstock muss aber gerade aufgeklappt werden
    - Der Ansetzpunkt muss markiert werden, aber „es darf kein ganzer Finger dazwischen sein, dann wird das ungenau“.

Verschiedene Wissensarten beim Messen

- Auf Konventionen beruhendes Wissen
  - Sozial konstruierte Vereinbarungen, z.B. das Ziffernblatt einer Uhr, das auch ganz anders konstruiert sein könnte:



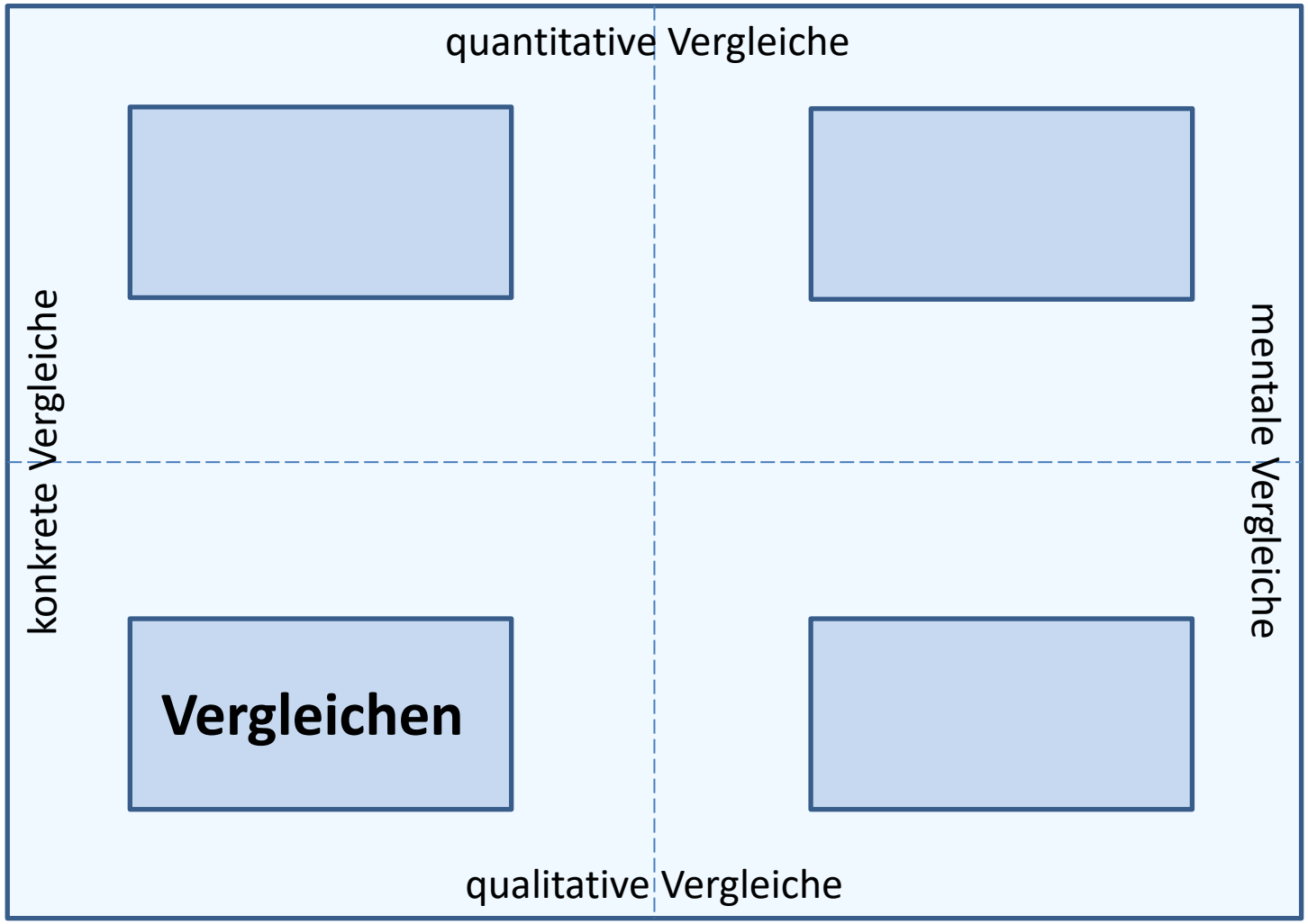
Größenverständnis als Kompetenz

- Kompetenzorientiertes Verständnis: Stützpunktvorstellungen sollen handlungswirksam in Alltags- und Anforderungssituationen sein
  - Wissensaspekte des Größenverständnisses: insbesondere Stützpunktwissen und dessen Beziehungshaltigkeit als Produkt von Stützpunktvorstellungen
  - Handlungsaspekte des Größenverständnisses: Vergleichsprozesse mit Stützpunkten, die verschiedene Beziehungen thematisieren und fokussieren
    - Qualitative und quantitative Vergleiche
    - Konkrete und mentale Vergleiche

LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Modell zum Aufbau von Stützpunktvorstellungen

Modell zum Aufbau von Stützpunktvorstellungen



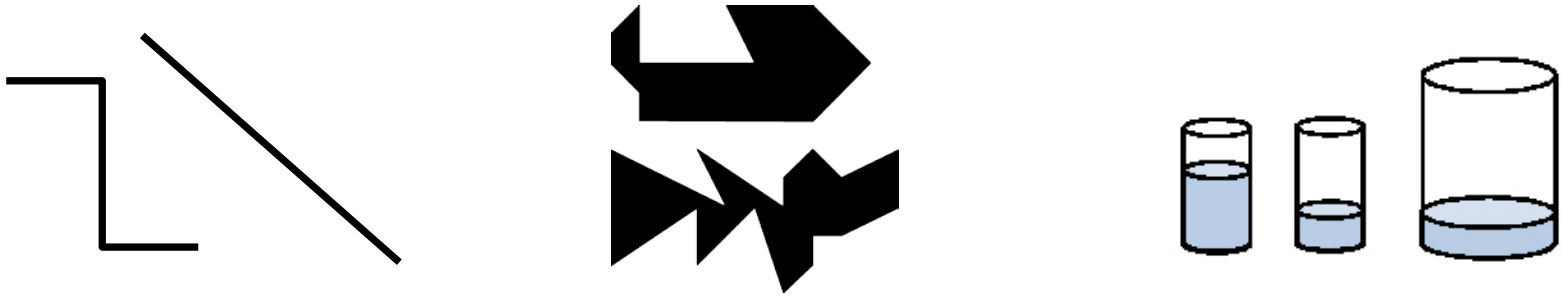
Größen vergleichen – sprachliche Grundlagen

- Adjektive, die verschiedene Größen beschreiben
  - Länge: lang, kurz, dick, dünn, hoch, tief, schmal, weit, eng, breit, groß, klein
  - Masse: schwer-leicht
    Flächeninhalt: groß-klein
    Zeit: lange-kurz; schnell-langsam
    Volumina: viel-wenig; groß-klein
- Komparative und Superlative
  - *länger*, *kürzer*, dicker, dünner, *höher*, tiefer, schmaler, weiter, enger, breiter, *größer*, kleiner, schwerer, leichter, schneller, langsamer, ***mehr***, weniger
  - am *längsten*, *kürzesten*, dicksten, dünnsten, *höchsten*, tiefsten, schmalsten, *weitesten*, engsten, *breitesten*, *größten*, kleinsten, schwersten, *leichtesten*, schnellsten, langsamsten, ***meisten***, wenigsten

Größen vergleichen

- Direktes Vergleichen durch gleichzeitiges Wahrnehmen
  - visueller Vergleich – einfach und erfolgreich

  - visueller Vergleich – schwierig und fehleranfällig



  - visueller Vergleich nicht möglich:
    Masse: gleichzeitig anheben; Zeit: gleichzeitig starten

Herausforderungen beim Vergleichen

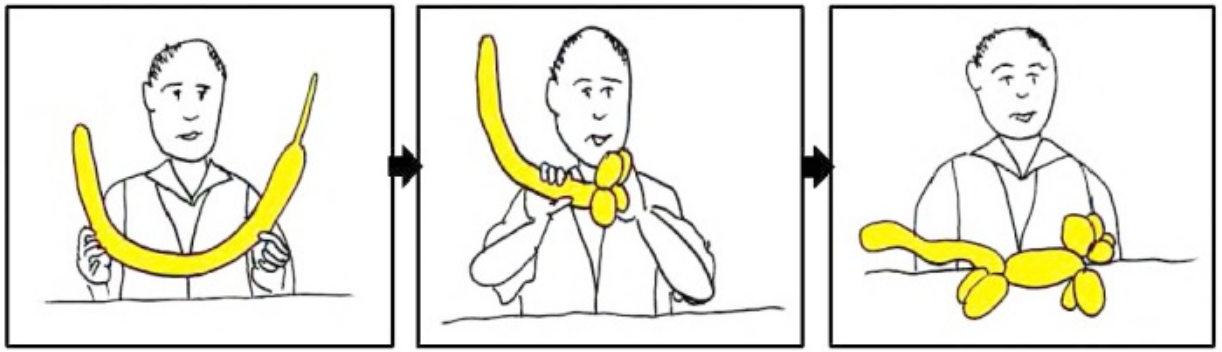
- Vom Augenschein zum Prüfen: Umstrukturierungs-möglichkeiten thematisieren
  - Längen: zu Strecken mit gleichen Startpunkten verändern
  - Flächen: eine Fläche zerlegen und die andere damit auslegen
  - Volumina: Flüssigkeiten in gleichartige Gefäße umschütten
- Transitivität und Invarianz: Voraussetzung und Ziel
  - Seriation: Ordnen bzgl. Länge (Fläche, Volumen) per Augenschein möglich
  - Masse: Paarvergleiche nur nacheinander möglich – Transitivität konkret oder mental einbeziehen (Zeit noch abstrakter)
  - Äquivalenz: Kaum empirisch nachweisbar – logische Operation
  - Invarianz: Hinsichtlich welcher Transformationen ist die Eigenschaft eigentlich invariant?

Invarianz der Masse

- Verformungen

  Knetkugel, Luftballonschlange,
  Papier falten

Hans formt einen Hund aus einem Luftballon.



Der Luftballon ☐ *wiegt mehr als* ☐ *wiegt weniger als* ☐ *wiegt genauso viel wie* der Hund.

Invarianz der Masse

- Verformungen

  Knetkugel, Luftballonschlange, Papier falten
- Zerlegungen und Zusammensetzungen

  Knete zerschneiden, Torte anschneiden, Eimer befüllen, Käse reiben
- Chemische Prozesse

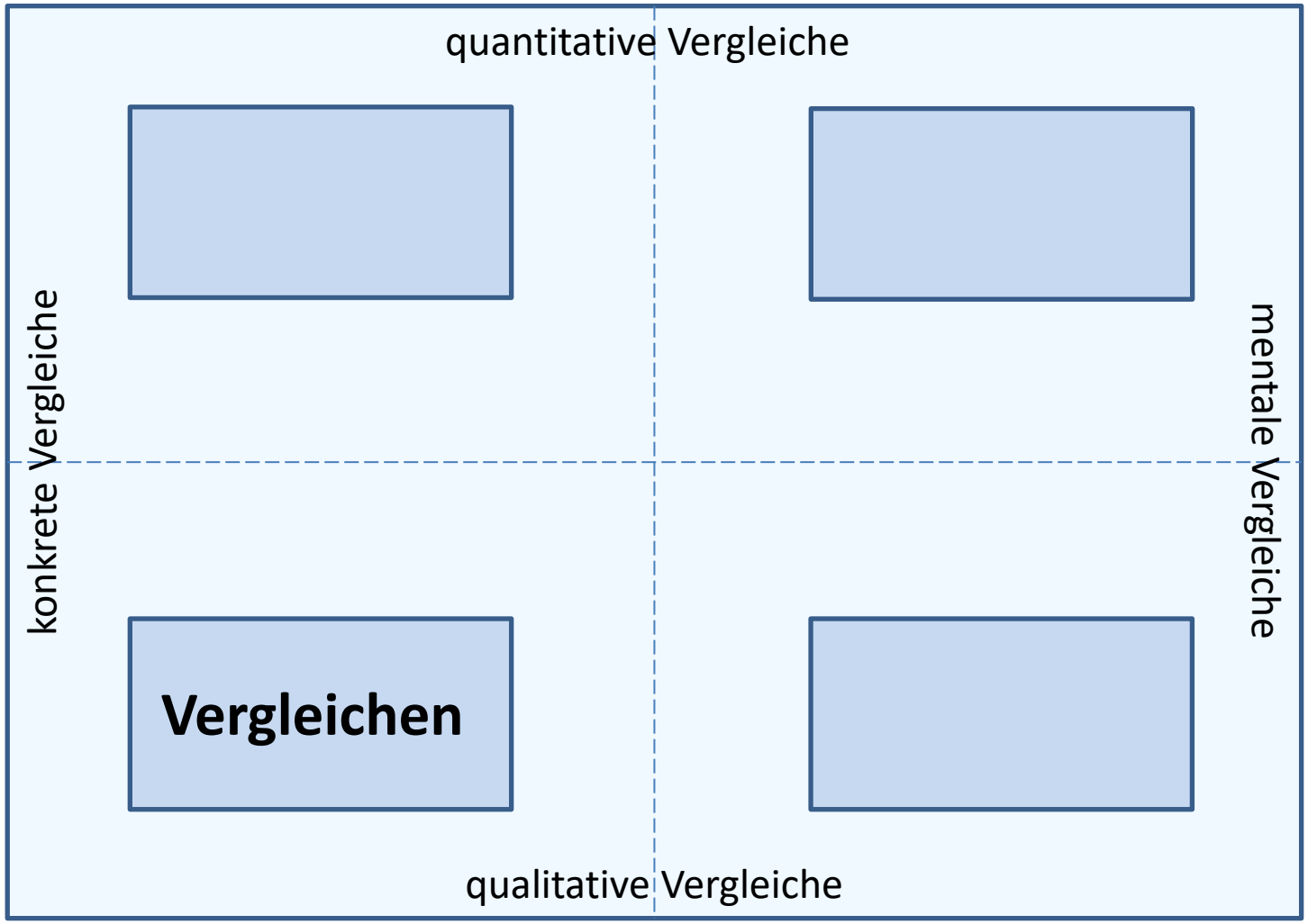
  Kuchen backen, Popcorn herstellen, Reis kochen

„Wenn man das jetzt reibt, wird der Schwerpunkt zerstört, und dann wiegt das nix mehr.“

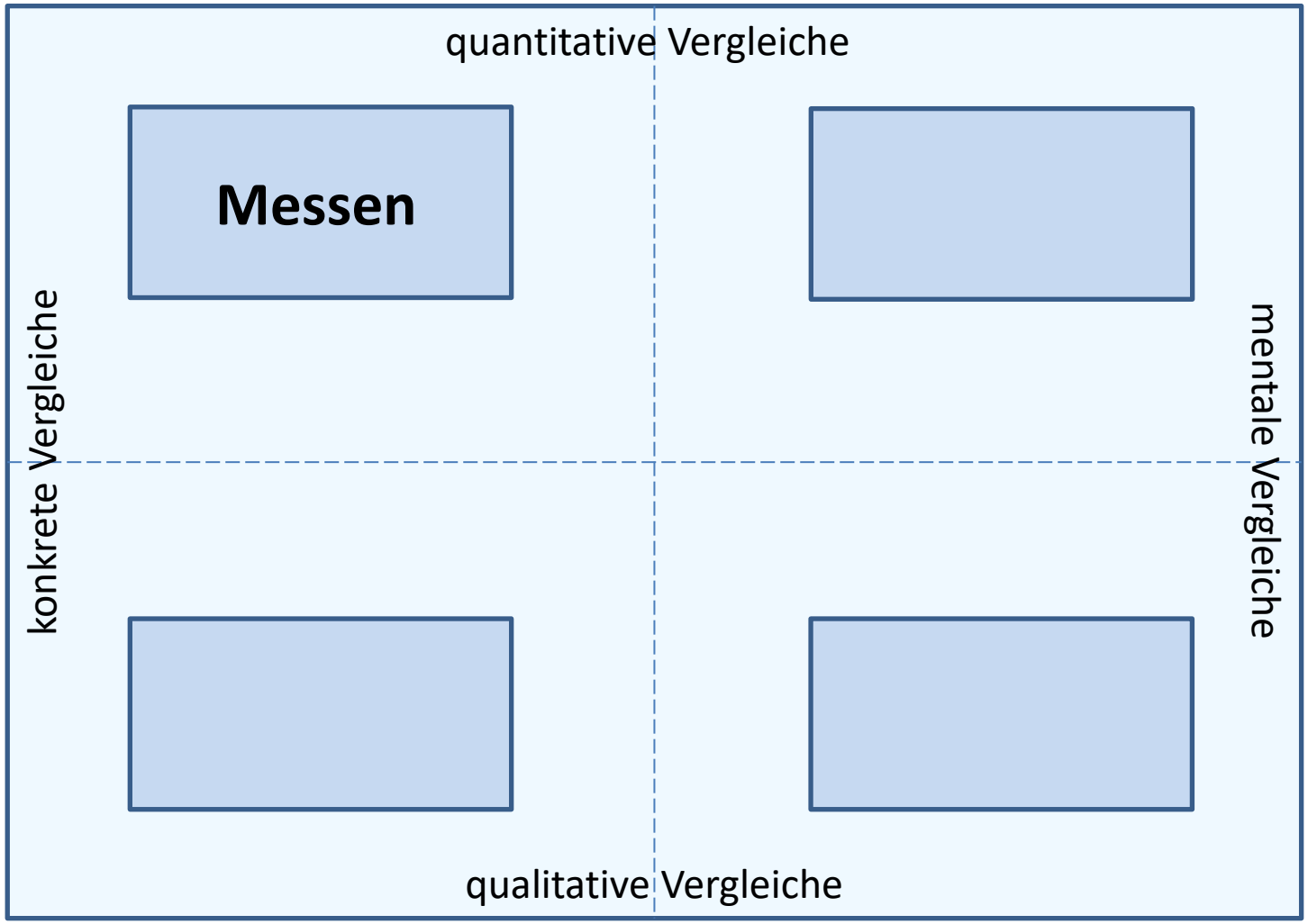
„Wenn man das Käsestück reibt, dann wird es immer kleiner und auch leichter … weil man das Gewicht sozusagen weg reibt.“

„Wenn man das reibt, bleibt das trotzdem gleich, weil es ja immer noch dieselben Teile sind.“

Modell zum Aufbau von Stützpunktvorstellungen



Modell zum Aufbau von Stützpunktvorstellungen



Größen messen

- Zentrale Kernideen des Messens
  - Auswählen einer passenden Einheit zum Messen
    - Es muss eine Einheit aus dem Größenbereich gewählt werden.
    - Die Einheit sollte kleiner sein als das zu Messende.
  - Mehrfaches Verwenden dieser Einheit
    - Eine Einheit muss mehrfach nacheinander oder mehrere gleichartige Einheiten miteinander verwendet werden.
    - Es muss (mit)gezählt werden, wie oft die Einheit verwendet wird.
  - Systematisches Untergliedern in Untereinheiten
    - Wird das zu Messende nicht hinreichend genau ausgemessen, wird die Einheit systematisch untergliedert.
    - Entweder wird halbiert/geviertelt oder aber in Zehnerpotenzen unterteilt.

Größen messen – Einheit mehrfach verwenden

- Eine Einheit mehrfach nacheinander verwenden
  - Länge: Ein Stift wird mehrfach nacheinander an der Tischkante entlang angelegt und mitgezählt wie oft.
  - Zeit: Eine Sanduhr wird mehrfach nacheinander umgedreht und mitgezählt wie oft.
  - Volumen: Ein kleiner Becher wird so lange mit Sand gefüllt und umgefüllt, bis das auszumessende Gefäß voll ist. Dabei wird jedes Umschütten mitgezählt.
- Mehrere gleichartige Einheitsobjekte verwenden
  - Länge: Es werden so viele Stifte hintereinander an der Tischkante entlang angelegt, bis diese ausgelegt ist. Dann wird gezählt, wie viele Stifte dort liegen.
  - Masse: Es werden so lange Holzwürfelchen auf die Waagschale gelegt, bis die Waage ungefähr im Gleichgewicht ist.

Größen messen – Systematisch untergliedern

- Spontanes Untergliedern
  - Je nach Genauigkeitsanspruch: „und ´n bisschen“
  - Eigenschaften der Einheit: „vier Füße und einer quer“
  - (Mehrfaches) Halbieren: schon Erstklässler
- Nutzen konventioneller Untergliederungen
  - Länge: Hundertstel und Zehntel
  - Masse und Volumen: Tausendstel
  - Zeit: keine Dezimalunterteilung
  - Zeit und Volumen, z.T. Masse: Brüche (¼, ½, ¾)

Struktur der Einheiten im Überblick?

Größen

Zeit

Jahr	Tag	Stunde (h)	Minute (min)	Sekunde (s)

1 Jahr = 365 Tage
1 Tag = 24 h
1 h = 60 min
1 min = 60 s

1 h 15 min = 75 min

Gewicht

Tonne (t)	Kilogramm (kg)	Gramm (g)

1 t = 1000 kg
1 kg = 1000 g

2,074 kg = 2 kg 74 g
3,678 kg = 3 kg 678 g

Länge

Kilometer (km)	Meter (m)	Zentimeter (cm)	Millimeter (mm)

1 km = 1000 m
1 m = 100 cm
1 cm = 10 mm

1,04 m = 1 m 4 cm
3,85 m = 3 m 85 cm

Rauminhalt

Meterwürfel	Dezimeterwürfel = Liter (l)	Zentimeterwürfel = Milliliter (ml)

1 Meterwürfel = 1000 l
1 l = 1000 ml

0,5 l = 500 ml
0,33 l = 330 ml

Geld

1 Euro = 100 Cent
0,10 Euro = 10 Cent
0,01 Euro = 1 Cent

8,75 € = 8 € 75 ct

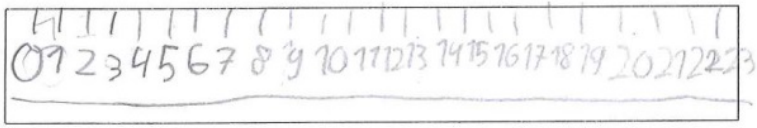
Messverständnis vertiefen – Anregungen

- Messinstrumente erkunden und entwickeln
  - Skalenverständnis: Lineal, Uhr, Messbecher zeichnen lassen
  - Messgeräte abhängig vom Zweck entwickeln und bauen
- ‚unkonventionelle' Messgeräte und -methoden
  - Abgebrochenes Lineal bzw. Maßband: ViertklässlerInnen nicht unbedingt sicher
  - Unregelmäßige Skalierungen: Messbändern mit ungleichen Abständen vs. kegelförmige Messbecher
  - ‚Weitermessen': keine Tara-Taste an der Balkenwaage?

Messinstrumente – Verständnis einer 3. Klasse

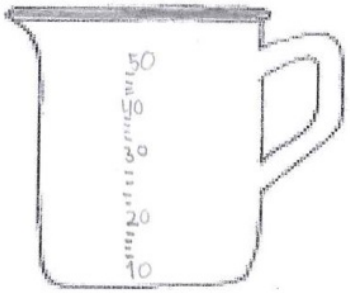
a) Stell dir vor das ist ein Messbecher. Zeichne ein, was noch fehlt, damit es aussieht wie ein richtiger Messbecher.

b) Stell dir vor das ist ein Lineal. Zeichne ein, was noch fehlt, damit es aussieht wie ein richtiges Lineal.

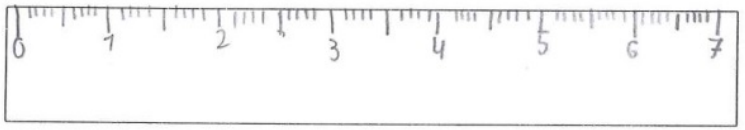


c) Stell dir vor das ist eine Uhr. Zeichne ein, was noch fehlt, damit es aussieht wie eine richtige Uhr.

a) Stell dir vor das ist ein Messbecher. Zeichne ein, was noch fehlt, damit es aussieht wie ein richtiger Messbecher.



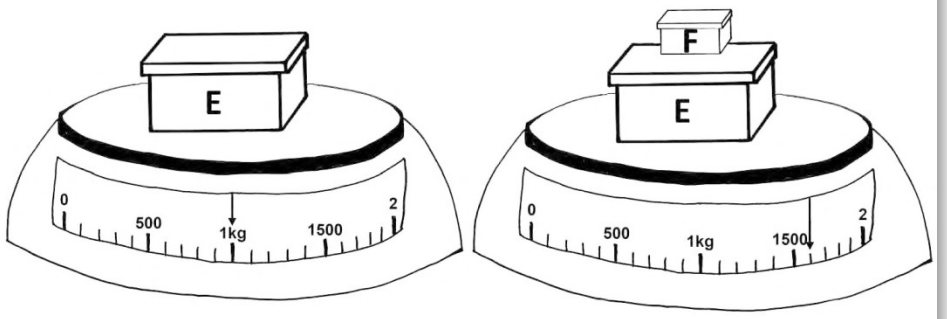
b) Stell dir vor das ist ein Lineal. Zeichne ein, was noch fehlt, damit es aussieht wie ein richtiges Lineal.



c) Stell dir vor das ist eine Uhr. Zeichne ein, was noch fehlt, damit es aussieht wie eine richtige Uhr.

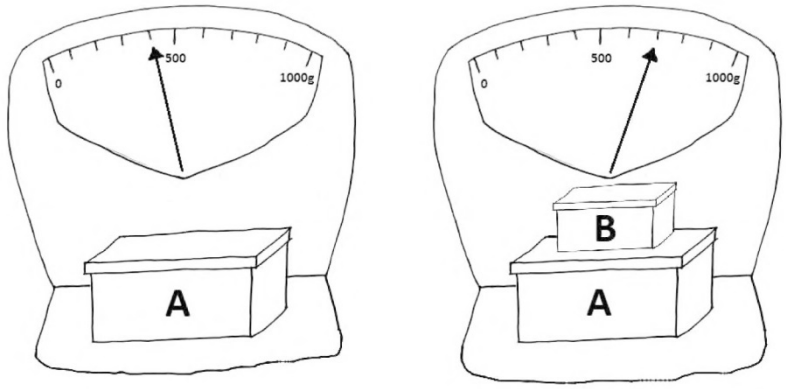
‚Weitermessen‘ mit verschiedenen Waagen

Jan wiegt Schachteln. Er legt zunächst eine Schachtel auf die Waage und dann noch eine. ***Wie viel*** wiegen die Schachteln? Trage auf der Linie das ***Gewicht*** ein!



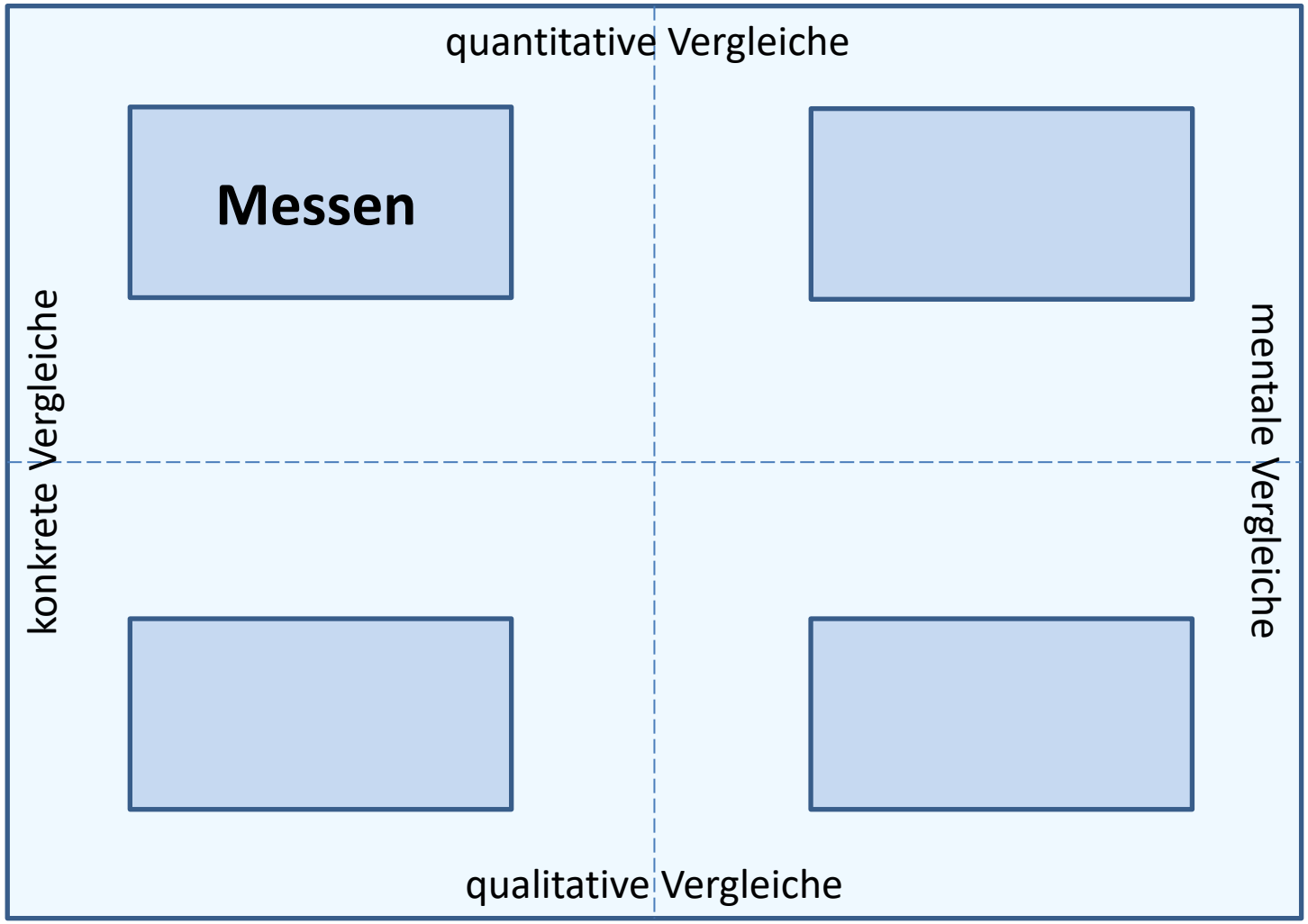
Antwort: Schachtel **E** wiegt _____. Schachtel **F** wiegt _____.

Wie viel wiegen die Schachteln? Trage auf der Linie das ***Gewicht*** ein!

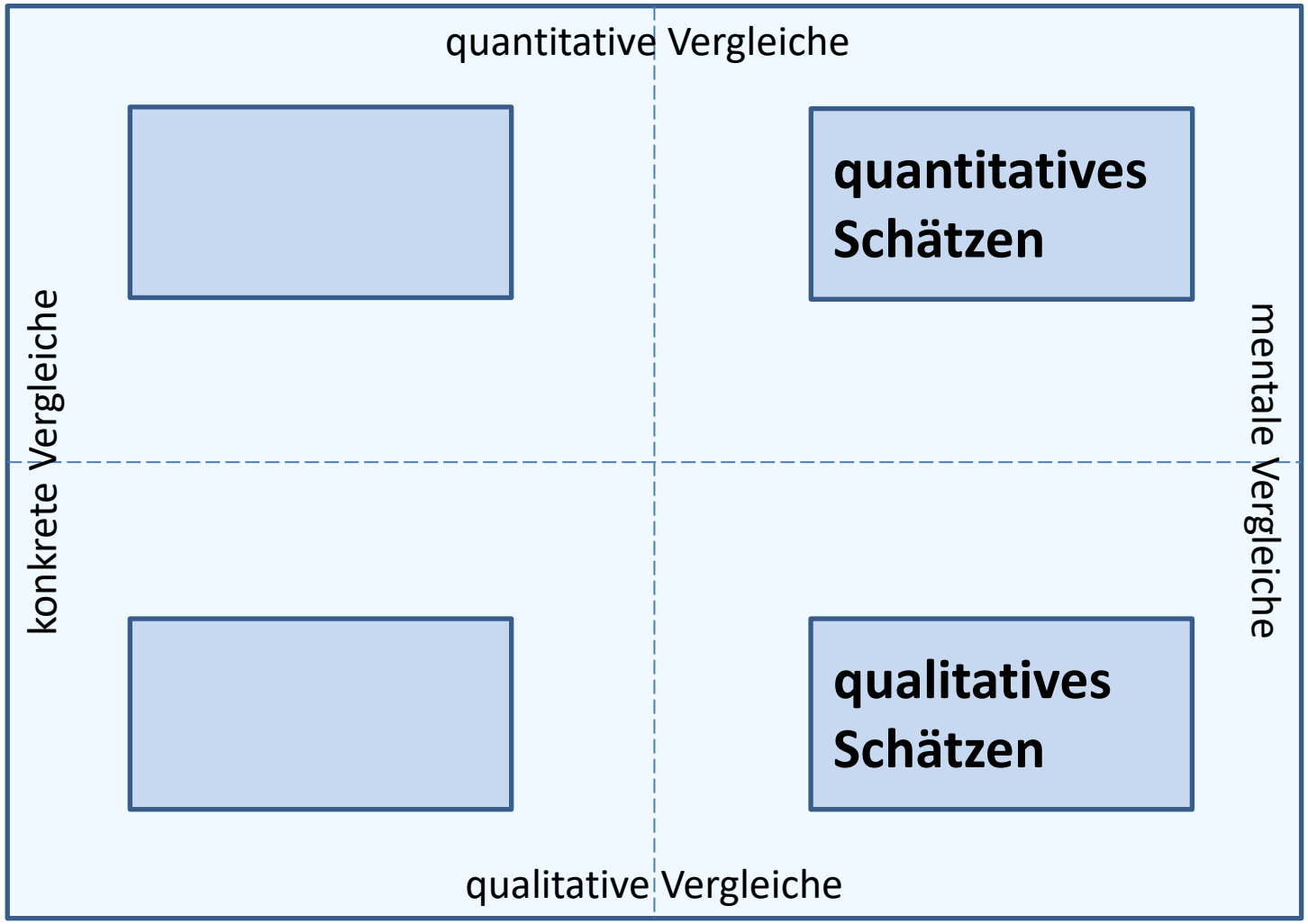


Antwort: Schachtel **A** wiegt _____. Schachtel **B** wiegt _____.

Modell zum Aufbau von Stützpunktvorstellungen



Modell zum Aufbau von Stützpunktvorstellungen



Größen schätzen

- Qualitatives Schätzen
  - Mentales Vergleichen (mit Stützpunkten):
    - Ist dieser Raum hier niedriger, höher oder ungefähr genauso hoch wie Ihr Klassenzimmer?
    - Ist die Türklinke mehr als, weniger als oder ziemlich genau 1 m über dem Fußboden?
- Quantitatives Schätzen
  - Mentales Ausmessen mit Stützpunkten oder Einheiten:
    - Wie viele Meter sitzen Sie von der Projektionsfläche entfernt?
    - Diese Reitergruppe ist insgesamt länger als 50 Meter. Kann das stimmen?

Schätzstrategien

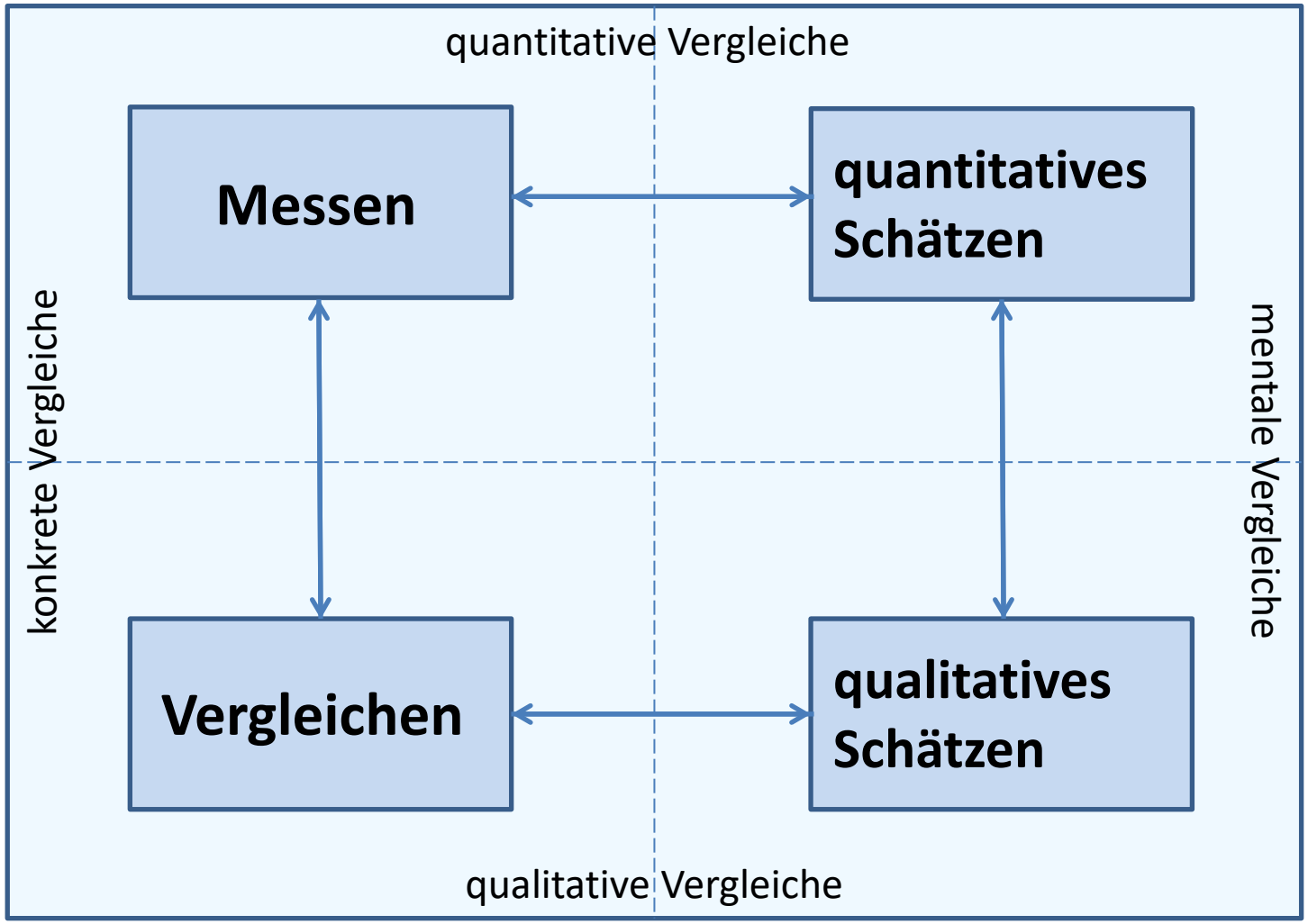
- Heranziehen eines Stützpunktes (benchmark estimation)
  - Mentaler „direkter“ Vergleich mit einem Stützpunkt
  - Mentaler Vergleich mit einem Bruchteil oder Vielfachen eines Stützpunkts
- Zerlegen / Zusammensetzen (decomposition/recomposition)

  Das zu schätzende Objekt wird mental in Abschnitte zerlegt, diese geschätzt und die Ergebnisse wieder zusammengefasst.
- Wiederholtes Abtragen einer Einheit (unit iteration)

  Das zu schätzende Objekt wird mental mit einer Standardeinheit ausgemessen.
- Annähern durch Einschachteln (squeezing)

  Das zu schätzende Objekt wird durch Ober- und Untergrenzen in seiner Bandbreite geschätzt.
- (Erworbenes Wissen)

Modell zum Aufbau von Stützpunktvorstellungen



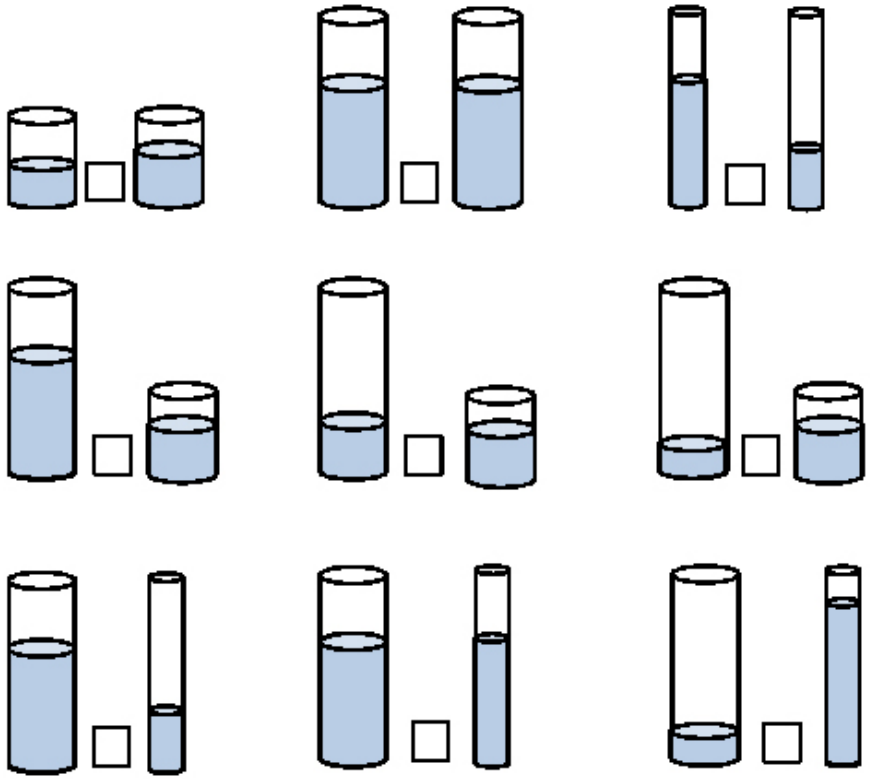
Fazit

- Stützpunktvorstellungen und Größenverständnis müssen kontinuierlich entwickelt werden:
  - Konkretes Vergleichen ist mehr als eine Vorstufe
    ⇒ immer wieder herausfordern
  - Messen ist mehr als das Ablesen eines Wertes auf einer Skala, aber auch mehr als eine additive Iteration
    ⇒ wie bereiten wir das Verständnis des zugrundeliegenden multiplikativen Vergleichs vor?
  - Schätzen ist mehr als Raten vor dem Messen
    ⇒ als wichtiges und mächtiges Hilfsmittel thematisieren

⇒ Stützpunktvorstellungen im Sinne des measure sense umfassen alle drei Prozesse

Herzlichen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

< = > ?



Verwendete Literatur

- Anderson, J. R. (2013[7]). *Kognitive Psychologie*. Berlin: Springer.
- Anderson, L. W. & Krathwohl, D. R. (Eds.) (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives.* New York: Longman.
- Barrett, J. E., Sarama, J. & Clements, D. H. (Eds.) (2017). *Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume*. Reston, VA: NCTM.
- Brand, M., Fujiwara, E., Kalbe, E., Kessler, J. & Markowitsch, H. J. (2002). Kognitives Schätzen bei Alzheimer- und Korsakow-Patienten. *Praxis Klinische Verhaltensmedizin und Rehabilitation,15*(60), 282–291.
- Bright, G. W. (1976). Estimation as part of learning to measure. In D. Nelson, & R. E. Reys (Eds.), *Measurement in school mathematics* (pp. 87–104). Reston, VA: NCTM.
- Bullard, S. E., Fein, D., Gleeson, M. K., Tischer, N., Mapou, R. L. & Kaplan, E. (2004). The Biber Cognitive Estimation Test. *Archives of Clinical Neuropsychology, 19*(6), 835–846.
- Cheeseman, J., McDonough, A. & Ferguson, S. (2012). The effects of creating rich learning environments for children to measure mass. In: J. Dindyal, L. P. Cheng & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp.178–185). Singapore: MERGA.
- Corle, C. G. (1963). Estimates of quantity by elementary teachers and college juniors. *The Arithmetic Teacher, 10*(6), 347–353.
- Clayton, J. G. (1992). *Estimation in Schools*. MPhil-thesis in Education. London: University of London. Retrieved from http://www.johngclayton.co.uk/website%20files/Output complete%20text.pdf [15-02-14].
- D'Aniello, G. E.; Castelnuovo, G. & Scarpina, F. (2015). Could cognitive estimation ability be a measure of cognitive reserve? *Frontiers in Psychology, 6*, 1–4.
- Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum.
- Heid, L.M. (2017). *Das Schätzen von Längen und Fassungsvermögen. Eine Interviewstudie zu Strategien mit Kindern im 4. Schuljahr*. Wiesbaden: Springer.
- Heinze, A., Weiher, D. F., Huang, H.-M. E. & Ruwisch, S. (2018). Which estimation situations are relevant for a valid assessment of measurement Estimation Skills? In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 67–74). Umeå Sweden: PME.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics* (S. 1–27). Hillsdale N.J. u.a.: Erlbaum.

Verwendete Literatur

- Hildreth, D. J. (1980). *Estimation strategy use in length and area measurement tasks by fifth and seventh grade students.* Abstract retrieved from PhDTree http://phdtree.org/ 24304583-estimation-strategy-use-in-length-and-area-measurement-tasks-by-fifth-and-seventh-grade-students/ [22-09-14].
- Hogan, T. P. & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 259-280.
- Huang, H.-M. E. (2014). Investigating children's ability to solve measurement estimation problems. In S. Oesterle; P. Liljedahl,; C. Nicol & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, (Vol. 3, pp. 353-360). Vancouver, Canada: PME.
- Jones, M. G.; Forrester, J. H.; Gardner, G. E.; Andre, T. & Taylor, A. R. (2012). Students' accuracy of measurement estimation: Context, units, and logical thinking. *School Science and Mathematics, 112*(3), 171-178.
- Joram, E., Subrahmanyam, K. & Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Journal of Educational Review*, 6, 413–449.
- Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education 36*(1), 4–23.
- Kleinknecht, M., Maier, U., Metz, K. & Bohl, T. (2011). Analyse des kognitiven Aufgabenpotentials: Entwicklung und Erprobung eines allgemeindidaktischen Auswertungsmanuals. *Unterrichtswissenschaft,* 39, 328–344.
- KMK (2004).*Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4*). München, Neuwied: Luchterhand.
- KM-BW (2016).*Fachplan Mathematik*. Heft 11 des Bildungsplanhefts 1/2016, Reihe A. Villingen-Schwenningen: Neckar-Verlag.
- Lee, K., & Smith III, J. P. (2011). What is different across an ocean? How Singapore and US elementary mathematics curricula introduce and develop length measurement. *ZDM Mathematics Education, 43*(5), 681–696. [DOI 10.1007/s11858-011-0339-0]
- Ruwisch, S. (2014). Reichhaltiges Schätzen – Schätzaufgaben und Schätzstrategien systematisieren. *Grundschule Mathematik 11*(42), 40-43.
- Ruwisch, S. & Huang, H.-M. E. (2019). Length measurement in the textbooks of German and Taiwanese primary students. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.) (2019). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6 – 10, 2019) (forthcoming 8pp.)*. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Siegel, A. W., Goldsmith, L. T. & Madson, C. R. (1982). Skill in Estimation Problems of Extent and Numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 211–232.
- Smith III, J. P., Males, L. M., Dietiker, L. C., Lee, K., & Mosier, A. (2013). Curricular treatments of length measurement in the United States: Do they address known learning challenges? *Cognition and Instruction*, *31*(4), 388–433.