Die Interaktion zwischen Kindern unterschiedlichen Alters über strukturell analoge Inhalte fordert aber insbesondere die Älteren heraus, eigene Gedanken und Erkenntnisse zu verbalisieren und somit das eigene Wissen bewusst zu betrachten, umzustrukturieren und schließlich zu vertiefen. Denn ihnen eröffnet der Rückblick auf den bereits durchlaufenen Lernprozess und auf die Handlungen und das Material jüngerer Kinder nicht nur eine persönlichkeitsförderliche Bestätigung der eigenen Lernentwicklung, sondern auch Reflexionsmöglichkeiten auf der Meta-Ebene.

Zudem fördert die Sichtweise auf ihre „Zone der früheren Entwicklung" in der Auseinandersetzung mit jüngeren Schülerinnen und Schülern oder mit eigenen früheren Arbeitsprodukten ein bewusstes Verstehen des eigenen Lernprozesses. Freudenthal (1978, S. 64) weist auf diesen Aspekt des „Lernens beim Lehren" hin: „Wenn man das Lernen eines Gegenstandes bei anderen beobachtet, während man ihn schon beherrscht (...), versteht [man], wie ein anderer lernt, ahnt, wie man selber gelernt hat, objektiviert die Tätigkeit auf niederer Stufe, um sie bewusster wiederholen zu können, auch wenn man sie inzwischen mechanisiert und algorithmisiert hat." Mit der Konstruktion einer Verbindung zwischen dem aktuellen und dem früheren mathematischen Wissen kann das alte Wissen tiefer durchdrungen und beziehungsreicher werden sowie als Basis zur Entwicklung neuen Wissens dienen.

> **Anregung 8: Analysieren Sie die einzelnen Schuljahresbände Ihres Unterrichtswerkes daraufhin, welche Inhalte und Aufgabenformate gleich oder ähnlich sind. Legen Sie die Seiten nebeneinander und überlegen Sie sich, inwieweit die Themen parallelisiert werden können.**

4.2 Gemeinsames Mathematiklernen an offenen Aufgabenstellungen

Die besonderen Chancen, die im fachbezogenen Austausch über Entdeckungen und Vorgehensweisen von unterschiedlichen Standpunkten und strukturell verschiedenen Niveaustufen liegen, bieten Anregungen für die Vertiefung und Weiterentwicklung des individuellen Denkens aller Kinder im Hinblick auf eine Verknüpfung von Individualisierung und Interaktion sowie von Aktion und Reflexion. Diesbezüglich sind gerade offene Aufgabenstellungen geeignet, wie sie im Abschnitt 1 erörtert worden sind, da sie so flexibel sind, dass an ihnen Anforderungen (Variation der Zahlenwerte und der

Komplexität) und Entdeckungen unterschiedlichster Qualität möglich sind. Sie sind allerdings an die besonderen Bedingungen des jahrgangsgemischten Unterrichts anzupassen, damit der Austausch über Lernprozesse und -produkte ebenso gelingt wie die individuelle Förderung (s. hierzu auch Abschnitt 4.4).

Beispielsweise wäre es beim „Zahl- und Sachforscherbuch" (s. Abschnitt 1) sinnvoll, wenn die Kinder ihre Entdeckungen in einem Heft für jeden Jahrgang auf einer Seite festhalten würden (z.B. im 1. Jahr auf der linken und im 2. Jahr auf der rechten Seite). Dann könnte die Sammlung im 2. Jahr wiederholt und fortgeführt sowie mit der alten Sammlung verglichen werden: Was hat und warum haben sich Zahlen in dem Jahr verändert? Warum gibt es mehr oder weniger von einer Sorte? Welche Rechengeschichten fallen dir zu den Zahlen auf den zwei Seiten ein?

Während bei dieser Arbeit vor allem der autonome Dialog mit eigenen Produkten aus verschiedenen Zeiten im Vordergrund steht, soll das folgende Beispiel aus dem Anfangsunterricht den Dialog zwischen Kindern zu verschiedenen Zeitpunkten der Auseinandersetzung mit Mathematik aufzeigen. Im Themenfeld „Begegnung mit Zahlen" setzen sich Kinder auf unterschiedliche Weise mit einer ihnen bedeutungsvollen Sachsituation auf mathematischer und zugleich auch auf sachlicher und sprachlicher Ebene auseinander. Dazu werden die Kinder aufgefordert, Zahlen zu unterschiedlichen Aspekten der Klasse (Anzahl der Geschwister, Hobbys, Haustiere, Lieblingsfarben, Augenfarben, Schuhgrößen, des Alters usf.) zusammenzutragen und in Form eines Diagramms festzuhalten (vgl. Radatz u.a. 1998).

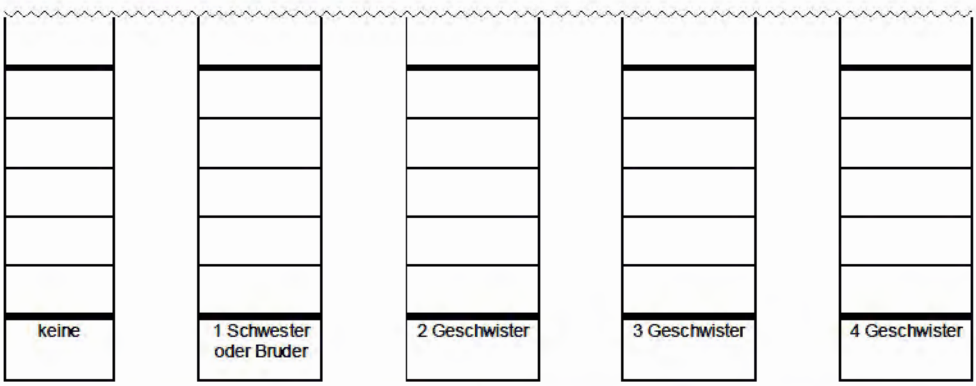


Abb. 8: Klassendiagramm zum Thema „Anzahl der Geschwister" (aus: Nührenbörger & Pust 2006)

Während manche Kinder die Anzahlen notieren, zählen, weiterzählen und arithmetische Beziehungen nutzen, sind andere aufgefordert, eigene Erkenntnisse festzuhalten und als Rechengeschichte zu formulieren oder weitere Fragestellungen auf unterschiedlichen Niveaus, die von Kindern mit Lesekompetenz vorgelesen werden, zu beantworten und somit die Aussagekraft der Diagramme zu erörtern und Interpretationen aufzustellen. Zum Abschluss stellen sich die Kinder gegenseitig ihre Erkenntnisse und ihre schriftlichen oder grafischen Darstellungsformen vor.

Ebenso ist das Spektrum an inhaltlicher Variation bei anderen offenen Aufgabenstellungen so zu erweitern, dass sich alle Kinder auf unterschiedlichen Anforderungsebenen mit Mustern und Strukturen auseinandersetzen und zugleich eine gemeinsame Gesprächsbasis für die kooperative Interaktion im Lösungsprozess und während der Reflexionsphase gewährleistet ist.

> **Anregung 9: Planen Sie auf der Grundlage der Anregungen aus der Literatur (z.B. Hengartner u.a.** (unter www.mathe-projekt.ch)**, Krauthausen 1998 oder Schwätzer 2005) eine Unterrichtseinheit zu Zahlenmauern oder Reihenfolgezahlen für jahrgangsgemischte Klassen und führen sie diese ggf. durch.**

In diesem Zusammenhang bietet sich insbesondere die Darstellung von substantiellen Aufgabenformaten in Form von doppelseitig bedruckten Lernheften an (z.B. zu Zahlenmauern, -häusern, -folgen, -ketten oder Rechendreiecken; s. das Beispiel im Anhang). Auf beiden Seiten finden sich stets strukturgleiche Aufgaben mit „Haltepunkten" zum gemeinsamen voraus- und zurückschauenden Lernen; sie unterscheiden sich lediglich im Hinblick auf den Zahlenraum oder Abstraktionsgrad. Während jüngeren Kindern beide Seiten zur Verfügung stehen, erhalten ältere ihr Lernheft aus dem Vorjahr zurück und bearbeiten die noch fehlenden Aufgaben. Dies erlaubt gerade den älteren die Reflexion der eigenen Produkte und Vorgehensweisen aus dem Jahr zuvor, die auf den neuen Zahlenraum übertragen werden. Ältere Kinder, die eine Doppelseite vollständig bearbeitet haben, erhalten weitere Blätter für Eigenproduktionen oder zusätzliche Aufgaben. Hingegen können gerade die jüngeren Kinder auf jeder Doppelseite den Abstraktionsgrad neu wählen.

4.3 Gemeinsames Mathematiklernen an strukturanalogen Aufgabenstellungen

Die im vorherigen Abschnitt vorgestellten strukturanalogen Lernhefte deuten bereits die besondere Chance an, die sich für das jahrgangsgemischte Mathematiklernen aus dem Spiralprinzip ergibt: Von verschiedenen, aber miteinander in Beziehung stehenden Standpunkten aus konstruieren und reflektieren Kinder unterschiedlicher Jahrgänge im dialektischen Spannungsfeld zwischen vorausschauendem und vertieftem Nachdenken über mathematische Strukturen, Muster und Beziehungen.

In diesem Zusammenhang bieten sich Aufgaben an, in denen die unterschiedlichen Rollen der Kinder aufgegriffen werden, die sich aus den verschiedenen Einschulungsjahrgängen ergeben und die von den Kindern „natürlich" wahrgenommen, gesucht und akzeptiert werden (vgl. Laging 1999). Beim „Rechenduett" (Nührenbörger & Pust 2005) arbeiten zwei Kinder an einem Aufgabenblatt, wobei die „Rollenverteilung" je nach Klassensituation offen bleiben kann. Jeweils zwei analoge Aufgaben auf unterschiedlichem Schwierigkeitsniveau sind nebeneinander angeordnet (s. hierzu die Schülerdokumente zu verschiedenen Aufgabenstellungen im Anhang). Beide Kinder schreiten stets gemeinsam von Aufgabenpaar zu Aufgabenpaar fort, so dass sie jeweils an der Interpretation des anderen teilhaben können.

Das gemeinsame parallele Arbeiten soll die Interaktionen zwischen den Kindern strukturieren und damit verdichteter machen. Zudem bedingt es metakognitive und sozial-interaktive Kompetenzen, die durch das gemeinsame Entwerfen von analogen Eigenproduktionen weiter gefördert werden. Die wiederkehrende Konfrontation mit einem Aufgabenformat bietet gerade älteren Kindern die Möglichkeit, länger bei einem Thema zu verweilen und einen neue Einsichten eröffnenden Blick auf mathematische Muster zu werfen. Die Arbeit an einem bekannten Aufgabenarrangement eröffnet ihnen die Chance, im Vorjahr gemachte Einsichten bewusst vor dem Hintergrund eigener Aktivitäten und der von den jüngeren Kindern zu reflektieren, um somit neue Erkenntnisse auf einer höheren Abstraktionsebene zu gewinnen.

Welche Chancen und auch Schwierigkeiten sich bei der Auseinandersetzung mit Rechenduetten und Koproduktionen im jahrgangsgemischten Mathematikunterricht ergeben, kann am Rechenduett zu „Mustern am 20er- und 100er-Feld" deutlich werden.

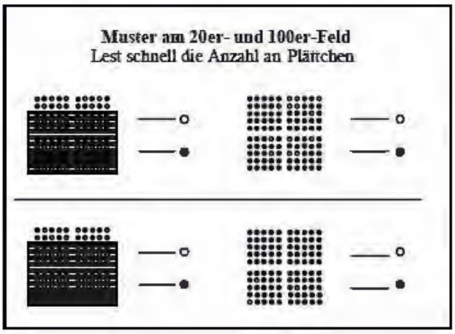


Abb. 9a: Rechenduett zu analogen Mustern

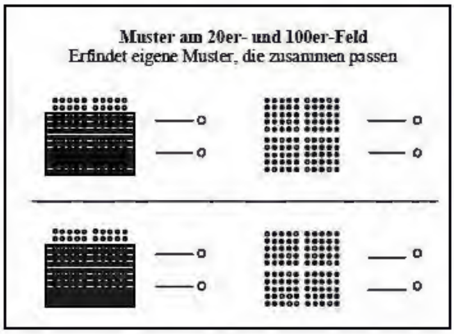


Abb. 9b: Koproduktion zu analogen Mustern

Anregung 10: Bearbeiten Sie zu zweit die Anfgaben und halten Sie fest, welche Absprachen Sie treffen und wie Sie sich fachbezogen austauschen. Was können die Kinder bei der Arbeit an diesem Aufgabenformat lernen?

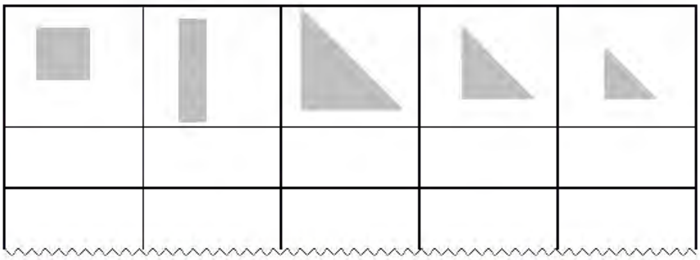
Anregung 11: Betrachten sie die strukturanalogen Aufträge in Form von Rechenduetten im Anhang. Welche fachbezogenen Chancen, welche Schwierigkeiten werden an den Schülerdokumenten deutlich?

4.4 Gemeinsamer jahrgangsgemischter Unterricht, nicht nur in Klassen 1 und 2

An einigen Schulen werden auch andere Modelle jahrgangsgemischten Unterrichts umgesetzt; z.B. werden die die Klassen 3 und 4 miteinander gemischt oder es werden alle vier Jahrgänge übergreifend unterrichtet. Zur Illustration soll hier kurz ein integrativer Unterrichtsinhalt aus dem Bereich Geometrie für die Klassen 1 bis 4 – ebene Figuren aus Dreiecken – vorgestellt werden. Ebene Figuren spielen im Geometrieunterricht der Grundschule eine bedeutsame Rolle, da grundlegende geometrische Begriffe, Eigenschaften und Beziehungen in der Handlung anschaulich entwickelt und ausgebaut werden. Zudem eröffnen sie ein weites Feld für kreative Aktivitäten, die bis zur Konstruktion von Bandornamenten führen.

Eine mögliche Aufgabe für eine gemischte Lerngruppe aus den Klassen 1 bis 4 besteht zunächst darin, aus einem Quadrat verschiedene Dreiecke (2 große oder 4 mittlere oder 8 kleine), vier Quadrate und vier Rechtecke über das Falten oder mit Hilfe der Schere herzustellen. Diese Formen dienen – nachdem sie benannt worden sind – als Material für die Konstruktion von Figuren. Dabei können Figuren aus einem Set an Formen, das sich bei einer Zerlegung eines Quadrats ergibt, hergestellt werden oder aus der Kombination von Sets, wenn beispielsweise mehrere Kinder zusammenarbeiten. Diese Aufgabenstellung führt dazu, dass einige Kinder mit den Formen zunächst ausschließlich experimentieren, während andere bereits elementare Entdeckungen machen, Beziehungen herstellen und diese als Umrissfiguren festhalten und nachlegen:

Sie erkennen einzelne Formen in den Figuren wieder, legen aus den Formen eine neue Form oder bilden in sich oder zueinander symmetrische Figuren. Zur Differenzierung kann man Figuren vorgeben, die ausgelegt oder symmetrisch ergänzt werden sollen. Die jeweiligen Möglichkeiten lassen sich in Form einer Tabelle festhalten (vgl. Radatz & Rickmeyer 1991).



Der freie Umgang mit den ebenen Formen wird einige Kinder dazu animieren, parkettartige Gebilde – d.h. lückenlose und überlappungsfreie Muster – hervorzubringen. Diese Ideen können aufgegriffen werden, um Gesetzmäßigkeiten in den Mustern zu verdeutlichen und Parkettmuster zu erzeugen, die durch wiederholtes Verschieben, Drehen oder Spiegeln eine vorgegebene Fläche ausfüllen. Weitere Aktivitäten wie das Parkettieren mit unregelmäßigen Vierecken (vgl. Carniel & Knapstein 2004) oder die Konstruktion von Parketten mit Hilfe der Knabbertechnik dienen zur Differenzierung.

Anregung 12: Sammeln Sie auf der Grundlage Ihrer Schulbücher und geometrischer Handbücher (z.B. Franke 2000, Radatz & Rickmeyer 1991) geometrische Unterrichtsideen für die Jahrgänge 1 bis 4 oder für 3 bis 4.

4.5 Helfen im jahrgangsgemischten Unterricht

Gemeinsames Lernen umfasst neben dem sozial-interaktiven Lernen auch kooperative Formen des Helfens. Dies kann darin zum Ausdruck kommen, dass in einer jahrgangsgemischten Lerngruppe ältere Kinder „Lehraufgaben" für jüngere übernehmen; z.B. als „Zifferncheifs" die Schreibversuche jüngerer Kinder zu einer Ziffer kontrollieren und korrigieren. Zugleich können aber auch jüngere Kinder im Rahmen des Ziffernschreibkurses Aufgabentafeln für ältere Kinder entwerfen. Kooperatives Arbeiten entwickelt sich allerdings nicht automatisch, auch wenn gerade in einer jahrgangsgemischten Klasse die älteren Kinder von sich aus aktiv Verantwortung für die jüngeren übernehmen und die unterschiedlichen Rollen von den Kindern bewusst akzeptiert werden (vgl. Laging 1999). „Vermutlich ist soziales Lernen, Lernen in sozialen Auseinandersetzungen mehr auf unverzerrte, unbelastete Kommunikation angewiesen, in der Missverständnisse und Fehler ohne Herabsetzung und Schaden aufgeklärt werden können, als auf eine, meist noch dazu fiktive Egalität, die produktive Spannung im Miteinander von Verschiedenheiten verhindern kann“ (Krappmann 2002, S. 100).

Das im Anhang abgebildete Transkript (aus Nührenbörger & Pust 2006) zeigt auf, wie sich Kinder in einer jahrgangsgemischten Lerngruppe 1 und 2 gemeinsam unterstützen. Dabei werden auf der einen Seite die Chancen des Mit- und Voneinanderlernens deutlich, die sich aus der Vielfalt der unterschiedlichen Erfahrungswelten ergeben. Auf der anderen Seite zeigen sich aber auch unterschiedliche Vorstellungen der Kinder zum Helfen auf, die zum Teil (vor)schnell Äußerungen und Handlungen produkt- und weniger prozessorientiert bewerten. Daher sind Prozesse kooperativen Arbeitens stets im Unterricht situationsspezifisch zu thematisieren, so dass die Kinder lernen, Sichtweisen von anderen als mögliche Alternativen zuzulassen und nachzuvollziehen, anstatt diese sofort vor dem Hintergrund der eigenen Idee negativ zu bewerten. Dies kann nur dann gelingen, wenn eine entsprechende Unterrichtskultur von der Lehrperson vorgelebt wird und richtiges „Helfen“ zum Thema gemacht wird. Nach Cohen (1993, S. 46) ist es für die Etablierung erfolgreicher Kooperationsprozesse wesentlich, dass die Art der erwünschten Interaktion mit Berücksichtigung findet: „Bei Routineaufgaben sollten die Schüler einander so helfen, dass sie verstehen, was Lehrer oder Schulbuch sagen, und sie sollten einander über Inhalte und Vorgehensweisen informieren. Beim Begriffslernen besteht die erwünschte Interaktion eher in einem Prozess, in dem Ideen, Hypothesen, Strategien und Spekulationen untereinander ausgetauscht werden. Für Lehrer kommt es darauf an, jene Art von Interaktion anzuregen, die ihrem Unterrichtsziel entspricht.“ Gerade letzteres ist für die Entwicklung struktureller Einsichten entscheidend.

Anregung 13: Lesen Sie das im Anhang abgebildete Transkript. Bilden Sie kleine Gruppen und analysieren Sie innerhalb der Gruppe die besonderen Chancen, die sich im Austausch und in dem Versprachlichen eigenen Wissens

für die älteren Kinder ergeben. Zeigen Sie zudem auf, an welchen Stellen die Kinder unterschiedliche Vorstellungen über das Helfen offenbaren.

5 Schlussbemerkungen

Gerade in der Grundschule stellt die Heterogenität der Lernenden – insbesondere auch in jahrgangsgemischten Lerngruppen – eine besondere Herausforderung für die Gestaltung des Mathematikunterrichts dar, allerdings auch eine besondere Chance.

Um den unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und -möglichkeiten der Schülerinnen und Schüler gerecht werden zu können, darf der Mathematikunterricht nicht nur auf die Entwicklung inhaltlicher Fähigkeiten und Fertigkeiten abzielen, sondern muss ebenso die Vermittlung von Lernstrategien und Arbeitstechniken betonen. Diese Kompetenzen gilt es kontinuierlich und von Anfang an aufzubauen. Dazu bedarf es geeigneter Inhalte, Materialien und Aufgabenstellungen, so dass die Kinder ihre mathematischen Aktivitäten eigenständig, gezielt und selbstverantwortlich zu organisieren und zu strukturieren lernen. Nur so kann zum einen lebenslanges Lernen grundgelegt, zum anderen der Herausforderung durch die Heterogenität der Schülerinnen und Schüler wirkungsvoll begegnet werden.

Darüber hinaus ist aber gerade der Erwerb mathematischen Wissens auf das gemeinsame Lernen und somit den Austausch der Kinder untereinander und mit den Lehrkräften angewiesen. In diesem Zusammenhang stellt die Vielfalt des Vorwissens und der Lernweisen der einzelnen Schülerinnen und Schüler eine besondere Chance dar, da gerade diese unterschiedlichen Lernvoraussetzungen im Rahmen interaktiver Unterrichtsformen für ein wechselseitiges Erklären und vertiefendes Weiterlernen genutzt werden können. Um eigenständiges und gemeinsames Lernen gleichermaßen im Mathematikunterricht zu realisieren, gilt es, geeignete Fachstrukturen zu erkennen und zu nutzen, die ein konstruktives, kooperatives, selbstregulierendes, zielorientiertes und kumulatives Lernen ermöglichen.

Literatur

Beck, A. (2002). Das Sammelbuch als Anlass und Mittel zur Kommunikation. In: Grundschule, H. 3, S. 21-24.

Boaler, J. (erscheint 2005). Promoting Equity in Mathematics Classrooms – Important Teaching Practices and their impact on Student Learning – full version. Text of a 'regular lecture' given at ICME, 2004, Copenhagen.

Carniel, D. & Knapstein, K. (2004). Parkettieren mit unregelmäßigen Vierecken. In P. Scherer & D. Bönig (Hrsg.). Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern (S. 116-127). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.

Cohen, E. G. (1993). Bedingungen für kooperative Kleingruppen. In G. L. Huber (Hrsg.). Neue Perspektiven der Kooperation. Ausgewählte Beiträge der Internationalen Konferenz 1992 über Kooperatives Lernen (S. 45-53). Baltmannsweiler: Schneider.

Franke, M. (1997). Offener Mathematikunterricht in einer altersgemischten Gruppe. In Die Grundschulzeitschrift, H. 104, S. 15-18.

Franke, M. (2000). Didaktik der Geometrie. Heidelberg u.a.: Spektrum.

Franke, M. (2002). Strategiekonferenzen. In: Grundschule, H. 3, S. 19-20.

Freudenthal, H. (1978). Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht. München: Oldenbourg.

Gräber, W. & Kleuker, U. (1998). "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Modul 8 des BLK-Programms Sinus: Entwicklung von Aufgaben für die Kooperation von Schülern (www.sinus-transfer.de).

Hengartner, E. u.a. (o.J.). Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht (www.mathe-projekt.ch).

Johnson, D.W. & Johnson, R.T. (1994). The new Circles of Learning. Cooperation in the Classroom and School. Alexandria/VA.

Konrad, K. & Traub, S. (2001). Kooperatives Lernen. Hohengehren: Schneider.

Krappmann, L. (2002). Untersuchungen zum sozialen Lernen. In H. Petillon (Hrsg.). Individuelles und soziales Lernen in der Grundschule – Kind, Perspektive und pädagogische Konzepte (S. 89-102). Leverkusen: Leske + Budrich.

Krauthausen, G. (1998). Lernen – lehren – Lehren lernen: Zur mathematisch-didaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe. Leipzig: Klett.

Laging, R. (1999). Altersheterogenität und Helfen – eine Untersuchung in der Schuleingangsstufe der Reformschule Kassel. In R. Laging (Hrsg.). Altersgemischtes Lernen in der Grundschule (S. 54-71). Baltmannsweiler: Schneider.

Nührenbörger, M. (2004). Millionenträume und -gedanken. Aufgabenformate zur Erkundung des Zahlenraums bis eine Million. In P. Scherer & D. Bönig (Hrsg.). Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern (S. 97-106). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.

Nührenbörger, M. & Pust, S. (2005). Integrierende Lernumgebungen. In R. Christiani (Hrsg.). Jahrgangsübergreifend unterrichten (S. 137-142). Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

Nührenbörger, M. & Pust, S. (erscheint 2006). Gemeinsamer Mathematikunterricht in jahrgangsgemischten Lerngruppen der Klassen 1 und 2 - „Aufgaben für Große und Kleine“. Seelze: Kallmeyer.

Peter-Koop, A. (2000). Sachaufgaben ohne Zahlen – ein alternativer Zugang zum Sachrechnen. In: Grundschulunterricht, H. 3, S. 32-36.

Prengel, A. (1995). Pädagogik der Vielfalt. Opladen: Leske+Budrich.

Radatz, H. & Rickmeyer K. (1991). Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1998). Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Rasch, R. (2004). Offene Aufgaben für unterschiedlich leistungsfähige Kinder. In: Grundschulunterricht, H. 2, S. 5-10.

Röhr, M. (1997). Kooperatives Lernen im mathematischen Anfangsunterricht. In: Grundschule, H. 3, S. 32-34.

Ruf & Gallin (1999). Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Seelze-Verlber: Kallmeyer.

Schipper, W. (2005). Mathematik zwischen Offenheit und Zielorientierung. Schülervorstellungen aufgreifen – grundlegende Ideen entwickeln. Basismodul G 3 zum BLK-Programm „Sinus-Grundschule Mathematik" (www.sinus-grundschule.de).

Schmidt, S. (2004). Was können Kinder am Schulanfang mathematisch wissen? Mathematik als Prozess – eine fortwährende Herausforderung für schulische Lehr-Lern-Prozesse. In P. Scherer & D. Bönig (Hrsg.). Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern (S. 14-25). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.

Schütte, S. (2002). Das Lernpotenzial mathematischer Gespräche nutzen. In: Grundschule, H. 3, S. 16-18.

Schwätzer, U. (2005). Substanzielles Aufgabenformat. In R. Christiani (Hrsg.). Jahrgangsübergreifend unterrichten (S. 152-156). Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

Selter, Ch. (1995). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht. In G.N. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.). Mit Kindern rechnen (S. 138-150). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.

Selter, Ch. (2005). Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten: Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule. Basismodul G 2 zum BLK-Programm „Sinus-Grundschule Mathematik" (www.sinus-grundschule.de).

Speck-Hamdan, A. (2000). Heterogenität als Lernchancen. Soziales Lernen in gemischten Gruppen. In A. Leonhardt (Hrsg.). Gemeinsames Lernen von hörenden und hörgeschädigten Schülern. Ziele – Wege – Möglichkeiten (S. 48-54). Hamburg: Verlag hörgeschädigter Kinder.

Steinbring, H. (1999). Offene Kommunikation mit geschlossener Mathematik? In Grundschule, H. 3, S. 8-13.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als seine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. In Journal für Mathematik-Didaktik, H. 1, S. 28-49.

Steinbring, H. (2003). Zur Professionalisierung des Mathematiklehrerwissens. In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.). Mathematik in der Grundschule (S. 195-219). Hannover: Kallmeyer.

Sundermann, B. & Selter, Ch. (1995). Halbschriftliche Addition im Tausenderraum (II). In: Grundschulunterricht, H. 42, S. 30-32.

Sundermann, B. & Selter, Ch. (2005). Mit Eigenproduktionen individualisieren. In R. Christiani (Hrsg.). Jahrgangsübergreifend unterrichten (S. 125-136). Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

Verboom, L. (2004). Entdeckend üben will gelernt sein! In: Die Grundschulzeitschrift, H. 177, S. 6-11.

Verboom, L. (2005). Gemeinsame Lernsituationen. In R. Christiani (Hrsg.). Jahrgangsübergreifend unterrichten (S. 143-151). Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

Weidner, M. (2003). Kooperatives Lernen im Unterricht. Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. Ch. (1991). „Was ist in der Tüte?“ Ein Beispiel für aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. In: Unterstufe (10), S. 273-275.

Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht der Grundschule? In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.). Mathematik in der Grundschule (S. 18-46). Hannover: Kallmeyer.

Glossar

- **Aufgabengeneratoren**: Aufgabengeneratoren bestehen zumeist aus einer Zusammenstellung eines ausgewählten Zahlenmaterials und der Vorgabe von durchzuführenden Operationen. Die Kinder können mit diesem Grundmaterial eigenständig Aufgaben bilden und dabei Umfang und Schwierigkeitsgrad selbst bestimmen.
- **Differenzierung**
    - **natürlich**: Natürliche Differenzierung ist eine Differenzierung vom Kinde aus. Dazu bedarf es ganzheitlicher Themenangebote mit Fragestellungen auf unterschiedlichem Niveau, die allen Kindern die Möglichkeit eröffnen, ihren Voraussetzungen und Möglichkeiten entsprechend neue Lernerfahrungen zu machen. Die Kinder entscheiden weitgehend selbst über die Auswahl des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben, über die Rechenwege, die Form und Notation der Lösung, die Verwendung von Arbeitsmitteln und Tipps, die Sozialform usw.
    - **qualitativ**: Qualitative Differenzierung berücksichtig die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und Lernmöglichkeiten der Kinder durch verschiedenste, durch die Lehrkraft gesteuerte differenzierende Maßnahmen. Zu einem Unterrichtsinhalt werden den Kindern von der Lehrperson unterschiedlich schwierige Aufgabenstellungen zugeteilt.
    - **quantitativ**: Quantitative Differenzierung berücksichtigt die Tatsache, dass Kinder unterschiedlich schnell arbeiten. Den Kindern werden für die Bearbeitung einer Aufgabe unterschiedliche Lernzeiten zur Verfügung gestellt. Für die langsameren Kinder wird von daher zumeist der Umfang an Aufgaben reduziert; besonders schnell lernende Schülerinnen und Schüler erhalten in der Regel Arbeitsblätter mit zusätzlichen Aufgaben.
- **Eigenproduktion**: Unter Eigenproduktionen versteht man mündliche oder schriftliche Äußerungen, bei denen Kinder eigene Überlegungen, Erfindungen, Entdeckungen, Erkenntnisse, Vorgehensweisen etc. einbringen und nach eigenen Vorlieben darstellen können.

- **Forscheraufgaben**: Aufgabenstellungen, die zum Untersuchen von mathematischen Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten auffordern. In der Auseinandersetzung mit derartigen Aufträgen sollen die Kinder Muster und Gesetzmäßigkeiten finden, beschreiben und begründen. Forscheraufträge unterstreichen die aktive Rolle der Lernenden.

- **Individualisierung**: Unterricht soll so gestaltet werden, dass er den individuellen Lernmöglichkeiten, Interessen und Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler angepasst ist und eigene Lernwege und Vorgehensweisen ermöglicht. Nur wenn die persönlichen Lernwege wahrgenommen und gezielt unterstützt werden, kann jedes einzelne Kind nachhaltig gefördert werden.

- **Jahrgangsgemischter Unterricht**: In jahrgangsgemischten (oder auch -übergreifenden bzw. -heterogenen) Klassen bilden Kinder unterschiedlicher Einschulungsjahrgänge eine Lerngruppe und werden gemeinsam, individualisiert oder auch in Leistungsgruppen unterrichtet. Hierbei sind verschiedene Modelle denkbar: Klasse 1 + 2 (ggf. und 3 + 4), Klasse 1 + 3 und 2 + 4, Klasse 1 - 3, Klasse 1 - 4. Vom jahrgangsgemischten Unterricht ist der jahrgangskombinierte zu unterscheiden. Letzterer entspricht in erster Linie dem traditionellen Unterricht in kleinen Schulen, in denen Kinder unterschiedlichen Altes gemeinsam eine Klasse besuchten, aber innerhalb der Klasse in Jahrgangsabteilungen aufgeteilt wurden.

- **Jahrgangshomogener Unterricht**: Im jahrgangshomogenen Unterricht bilden Kinder eines Einschulungsjahrgangs eine Klasse. Teilweise werden an Projekttagen oder in „Lernhäusern“ zu bestimmten Inhalten flexible jahrgangsübergreifende Gruppen gebildet.

- **Koproduktion**: Wenn zwei Kinder gemeinsam zwei strukturanaloge Aufgaben mündlich oder schriftlich entwerfen, entwickeln sie eine Koproduktion („strukturanaloge Eigenproduktion“). Hierbei entscheiden sie in Paar-Verantwortung über ihr Vorgehen und die Darstellung ihrer Ergebnisse sowie die Erläuterung und Reflexion von Auffälligkeiten.

- **Lernhefte**: Lernhefte können offen oder strukturanalog aufgebaut sein. Sie enthalten problemorientierte Aufgabenstellungen, die von den Kindern in Einzel- oder Partnerarbeit bearbeitet und auch zur gemeinsamen klasseninternen Reflexion genutzt werden. Die Lösungswege und Ergebnisse werden im Heft festgehalten. Lernhefte können so strukturiert werden, dass sie in verschiedenen Jahrgängen immer wieder genutzt werden können und somit stets eine Vorausschau und einen Rückblick auf analoge Lerninhalte bieten.

- **Lerntagebücher**: Im Lerntagebuch halten die Kinder die Ergebnisse ihrer individuellen Auseinandersetzung mit dem Lernstoff (Überlegungen, Lösungsansätze, Erfindungen, Reflexion des eigenen Lernzuwachses, Fragen etc.) fest. Lerntagebücher bilden folglich die individuellen Lernwege und Lernentwicklungen der Kinder ab und sind für die Lehrkraft ein wichtiges diagnostisches Instrument.

- **Mathematiklernen**
    - **aktiv-entdeckend**: In der heute vorherrschenden Sichtweise wird Mathematiklernen als konstruktiver Aufbauprozess verstanden. Lernzuwachs erfolgt nicht über passiven Nachvollzug vermittelter Begriffe, Regeln oder Lösungsschemata; vielmehr nutzt das Kind in der aktiven, selbstständigen Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsstoff bereits verfügbare Wissenselemente, Fertigkeiten und Fähigkeiten, um noch nicht bekannte Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten zu entdecken und eigene Lösungsstrategien zu entwickeln. Hierzu müssen ergiebige, herausfördernde Lernanlässe bereit gestellt werden.
    - **kooperativ**: Kooperative Lernprozesse ergeben sich, wenn mehrere Kinder im sozialen Austausch als Gruppe gemeinsam an einer Aufgabenstellung arbeiten. Eigenverantwortlichkeit für die Gruppenarbeitsprozesse, positive gegenseitige Abhängigkeit, gemeinsame Reflexion des Arbeitsprozesses, soziale Kompetenzen und kommunikative Arbeitsstrukturen sind die wesentlichen Elemente des kooperativen Lernens.
    - **kumulativ**: Das Lernen soll kumulativ, d.h. aufbauend und erweiternd angelegt sein, um den Schülerinnen und Schülern ein fortschreitendes Lernen zu ermöglichen und sie ihren Kompetenzzuwachs erfahren zu lassen. Das erfordert – insbesondere im Fach Mathematik – ein vielfältiges Verknüpfen der hierarchisch aufgebauten Lerninhalte. Das Spiralprinzip begünstigt kumulatives Lernen.

- **produktiv**: Die Konzeption des produktives Lernens umschreibt die Tatsache, dass die Schülerinnen und Schüler den Unterricht und auch den eigenen Lernprozess sowohl in ergiebiger Weise als auch durch ihre Produkte mitgestalten.

- **offene Aufträge**: Offene Aufträge (Aufgaben, Lernangebote) sind relativ komplex im Gegensatz zu Aufgaben nach dem Prinzip der Isolierung der Schwierigkeiten, die von allen Kindern dieselben Fertigkeiten und Vorgehensweisen erfordern. Sie bieten die Möglichkeit, eigene Kenntnisse und Erfahrungen einzubringen und ermöglichen eigene Lösungswege auf unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen sowie Selbstdifferenzierung, z.B. durch die Freistellung des Zahlenraums.

- **Pädagogik der Vielfalt**: Die Pädagogik der Vielfalt geht davon aus, dass sich alle Kinder innerhalb einer Klasse voneinander unterscheiden und diese Heterogenität im Mittelpunkt des Unterrichts und aller theoretischen Überlegungen stehen muss. Dabei wird von dem Primat der intersubjektiven Anerkennung zwischen gleichberechtigten Verschiedenen ausgegangen, so dass nicht gleiche Handlungserwartungen an verschiedene Kinder gestellt werden. Es gilt das Prinzip „zieldifferenzierten Lernens", das gleichschrittiges Lernen wegen der Unterschiedlichkeit der Lernausgangslagen nicht zulässt.

- **Parallelisierung**: Hierunter wird die zeitgleiche Er- und Bearbeitung analoger Aufgaben in verschiedenen Zahlenräumen verstanden. Themen, die im Rahmen des Spiralprinzips bisher auf zwei Jahre verteilt wurden, werden unter Beachtung der hierarchischen Struktur mathematischer Inhalte zu Modulen verknüpft, so dass alle Kinder in einer jahrgangsgemischten Klasse an einem gemeinsamen Thema lernen können.

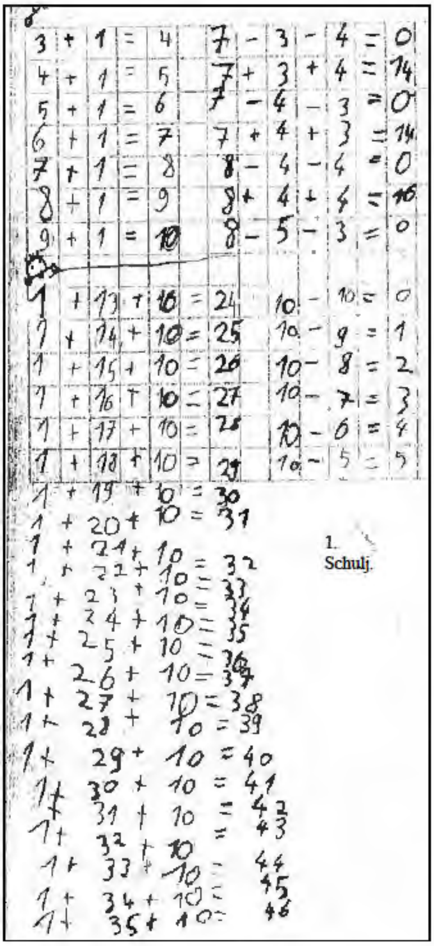
- **Rechenduett**: Zwei Kinder erhalten gemeinsam eine Aufgabe, die zwar auf einem Blatt notiert ist, allerdings zwei strukturell analoge Aufgaben auf unterschiedlichem Niveau beinhalten. Beide Kinder bearbeiten im dialogischen Austausch die Aufgaben.

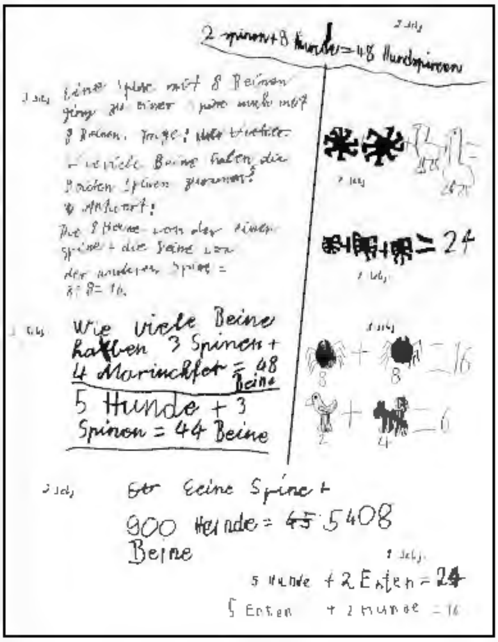
- **Selbstreflexion:** Das Nachdenken über einen Lerninhalt bzw. der Rückblick auf den eigenen Lernprozess vermag bestimmte Lernerfahrungen bei der Auseinandersetzung mit einem Lernangebot ins Bewusstheit zu heben, zu vertiefen oder ggf. auch zu generalisieren. So können Schüler beispielsweise gebeten werden, rückschauend noch einmal ihren Lösungsweg oder ihre Vorgehensweisen mündlich oder schriftlich darzustellen oder zu überprüfen, ob sie ähnliche Aufgabenstellungen auf ähnliche Weise lösen können. Sie können aufschreiben, was sie Neues erfahren oder gelernt haben, aber auch, was sie verstanden bzw. nicht verstanden haben oder was sie besonders leicht oder schwer fanden.

- **Spiralprinzip**: Mathematische Inhalte werden in unterschiedlichen Zahlenräumen und auf verschiedenen Niveauebenen in den einzelnen Schuljahren wiederkehrend eingeführt, wiederholt und vertieft.
- **strukturanaloge Aufgabenstellungen**: Zwei Aufgaben sind strukturanalog, wenn ihre Inhalte in mathematischen Zusammenhängen stehen und somit zu Gunsten einer vernetzten Betrachtung aufeinander bezogen werden können.
- **substanzielle Aufgabenformate**: Darunter versteht man Aufgaben, die der Leistungsheterogenität dadurch Rechnung tragen, dass sie im gleichen inhaltlichen Kontext ein breites Spektrum an unterschiedlichen Anforderungen und Schwierigkeiten abdecken. Durch differenzierte Fragestellungen auf unterschiedlichem Niveau arbeiten alle Kinder am gleichen Inhalt, bearbeiten aber nicht unbedingt alle dieselben Aufgaben. Substanzielle Aufgaben ermöglichen verschiedene Lösungswege und erlauben es, allgemeine Lernziele zu verfolgen.
- **Wissen**
    - **informell**: Informelles Wissen meint die Lernerfahrungen, die Kinder außerhalb von Schule zu einem mathematischen Bereich aufgebaut haben und die die wesentlichen Lernvoraussetzungen ausmachen, die es auszuweiten, angemessen zu gestalten und weiter zu entwickeln gilt.
    - **konzeptuell**: Konzeptuelles Wissen ruht auf der Einsicht und dem Verständnis in grundlegende mathematische Beziehungen und Strukturen.
    - **prozedural**: Prozedurales Wissen beinhaltet routinemäßig angewandte Algorithmen, die auswendig gelernt worden sind, ohne zugleich tiefere Einsichten in die dahinter liegenden Strukturen gewonnen zu haben.

Anhang:

Schülerdokumente zu offenen Aufträgen (zu Kapitel 1 und 2: Anregung 3 und 4)





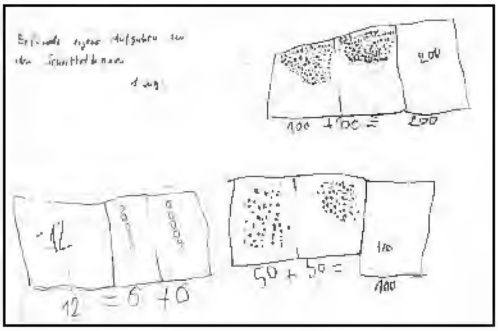


Abb. 10a: Erfindungen zu „Entdeckerpäckchen“, „Geschichten“ und „Schüttelboxen“

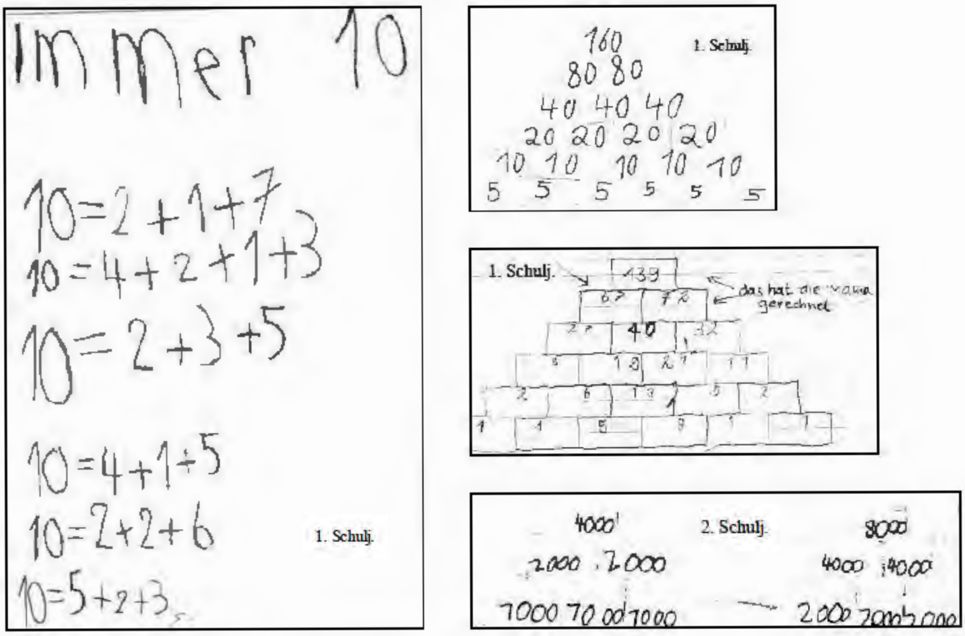


Abb. 10b: Erfindungen zu „Ergebnissummen“ und „Zahlenhäusern“

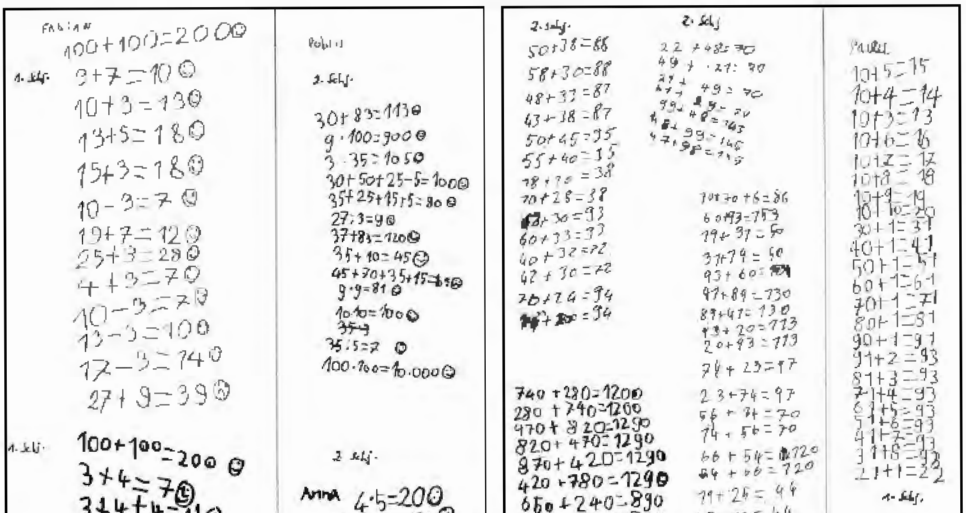


Abb. 10c: Aufgabengeneratoren zu „Zahlenset“ und „Zahlenkarten“

Mediale Parallelisierung des 20er- und 100er-Feldes (zu Kapitel 4.1; Anregung 6)

Abb. 11: 20er- und 100er-Feld (vgl. Nührenbörger & Pust 2005, S. 139)

Ausschnitt aus einem strukturgleich aufgebauten Lernheft (zu Kapitel 4.2)

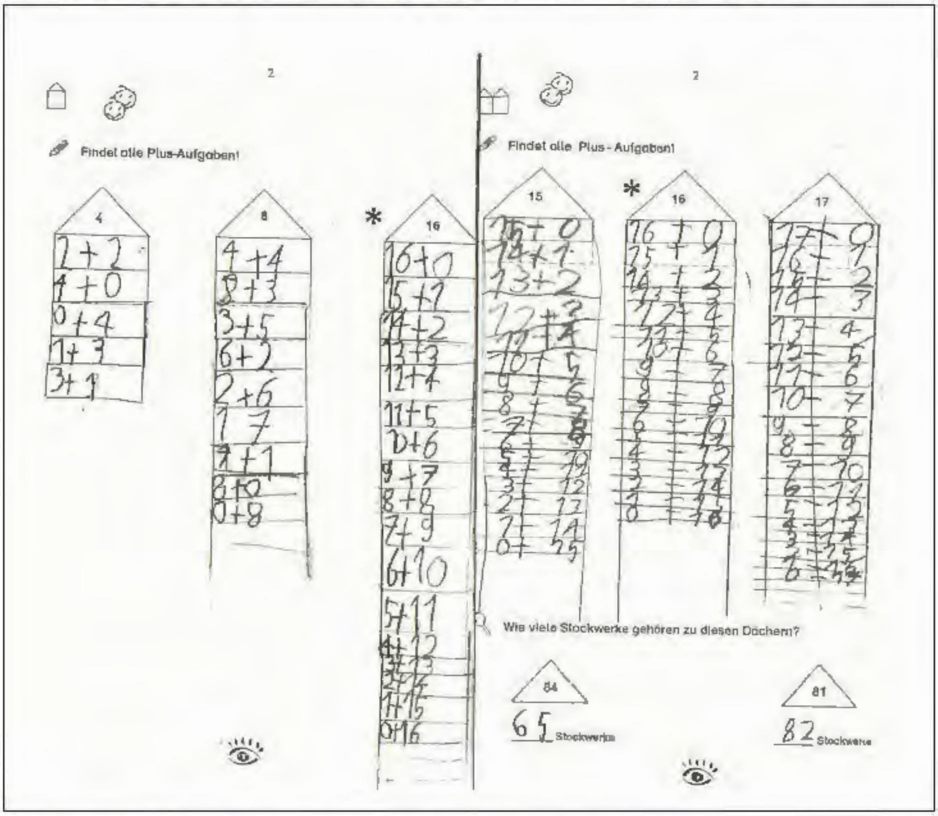


Abb. 12: Zahlenhäuserheft eines älteren Kindes – im 2. Jahr der Bearbeitung

Rechenduett und Koproduktion (zu Kapitel 4.3; Anregung 11)

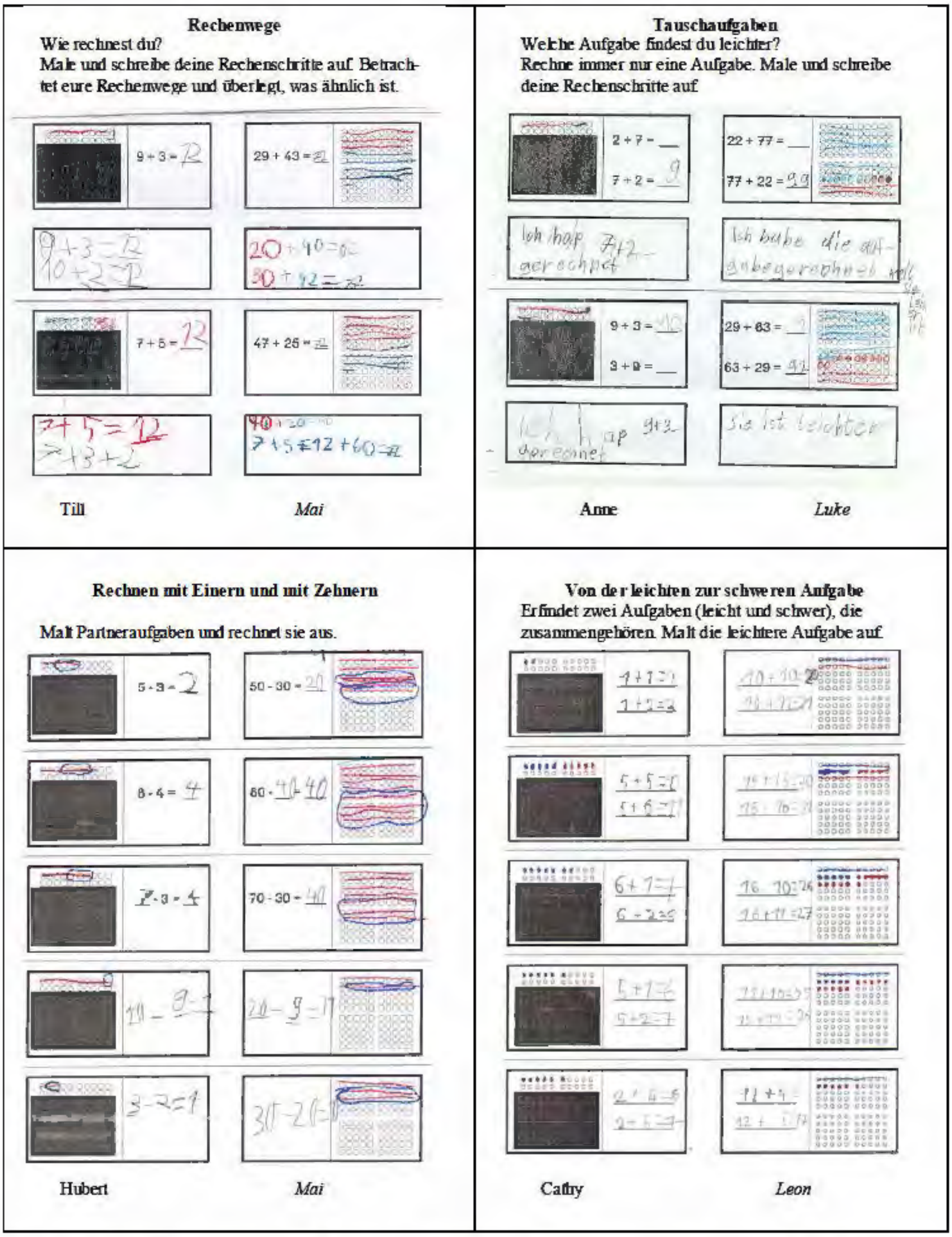
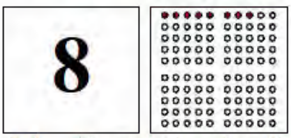


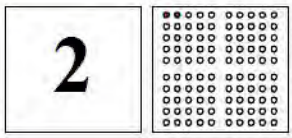
Abb. 13: Rechenduette und Koproduktionen - Die älteren Schüler sind jeweils kursiv gekennzeichnet.

Transkript (zu Kapitel 4.5; Anregung 13)

Das Transkript bezieht sich auf eine Unterrichtsphase, in der die Kinder einer jahrgangsgemischten Klasse 1/2 mit Wendekarten konfrontiert werden. Bei den Wendekarten befindet sich auf der einen Seite die Zahl in Form von Ziffern, während die andere Seite ein Hunderterpunktefeld zeigt, in dem die entsprechende Zahl dargestellt ist. Die älteren Kinder sind jeweils kursiv markiert (Transkript aus Nührenbörger & Pust 2006).

1	L	Wir haben ja in den letzten Stunden darüber gesprochen, wie man Zahlen mit Punkten darstellen kann. Dazu habe ich einige Karten heute mitgebracht [*verteilt verschiedene Wendekarten in der Mitte des Sitzkreises*]. Schaut euch die mal an! [*19 sec. Pause*] Was stellt ihr fest?
2	Si.	Dass die Kärtchen da liegen.
3	L	Mhm. Ra.
4	Ra.	Und ich hab` wohl gesehen, dass da drunter noch Zahlen sind.
5	L	Ah, das hast du schon gesehen? Wie haben jetzt diese Kärtchen etwas mit den Zahlen zu tun da drunter? Mai.
6	*Mai.*	Mh da weil das ist die gleiche Summe ähm wie, wie die Punkte.
7	*Ma.*	Und so ne Zahl.
8	L	Wie meinst du das genau? Versuch das noch mal genau zu erklären.
9	*Mai.*	Also, das ist die gleiche Zahl, wie die hier mit Punkten aufgemalte [*S redet dazwischen*] sind, ist, steht dahinter.
11	L	Aha. Welche Zahl siehst du denn da bei dir?
12	*Mai.*	Sieben.
13	L	Dann dreh die mal um! Klasse [*Mai hält das Kärtchen für die Kinder sichtbar in der Hand*]. Dreh sie mal um und lege sie umgedreht auf den Boden [*Mai legt das Kärtchen umgedreht auf den Fußboden*]. So, mmm, wer kennt denn noch eine andere Zahl, die er entdeckt? Fa.
14	Fa.	Zum Beispiel ne Acht.
15	L	Wo sieht du denn die Acht?
16	Fa.	[*Fa zeigt auf die Wendekarte, auf dem die Zahl zwei dargestellt ist*]





17	Nik.	[*fragende Bemerkung*] Das ist `ne Zwei, ich sag`s nur.
18	Fa.	[*Fa nimmt die Wendekarte mit der dargestellten Eins in die Hände*]
19	*Mat.*	Da ist die, da ist die [*zeigt auf die Wendekarte mit der Acht*]. Hier, da.
20	Nik.	Das ist `ne Eins.
21	L	Das ist also `ne Eins.
22	*Mat.*	[*tippt Fa. auf die Schulter und zeigt erneut auf das Kärtchen*]
23	Fa.	[*nimmt die Wendekarte mit der Acht in die Hand*]
24	Ss	Das ist `ne Acht!
25	L	Mat., jetzt hast du dem Fa. ja geholfen.
26	*Mat.*	Mhm.
27	L	Woran hast du denn gesehen, dass das eine Acht ist?
28	*Mat.*	Weil-
29	L	Dreh `s noch mal um.
30	*Mat.*	Zwei fehlen noch, wegen das sind ze zehn.
31	Fa.	[*Fa zählt die roten Punkte auf der Wendekarte*]
32	L	Mhm. Stimmt` s, Fa.?
33	Fa.	Acht Punkte. Acht.

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS-Transfer Grundschule
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-grundschule.de

Programmkoordination für die Länder durch das Ministerium für Bildung und Frauen des Landes Schleswig-Holstein (MBF)
MR Werner Klein (SINUS-Transfer Grundschule)
http://landesregierung.schleswig-holstein.de

Landeskoordinatorenausbildung durch das Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
StD Christoph Hammer; gemeinsam mit dem IPN
www.isb.bayern.de

Serverbetreuung: Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts der Universität Bayreuth (Z-MNU)
Leitung: Prof. Dr. Peter Baptist
http://zmnu.uni-bayreuth.de

Hinweis: Die Modulbeschreibungen sind während der Laufzeit des Programms SINUS-Transfer Grundschule (2004-2009) entstanden.
Die Liste der Kooperationspartner galt für diesen Zeitraum. Im Nachfolgeprogramm *SINUS an Grundschulen* sind die Kooperationen anders strukturiert.

ISBN für diese Modulbeschreibung (Mathematik G8)
978-3-89088-187-4