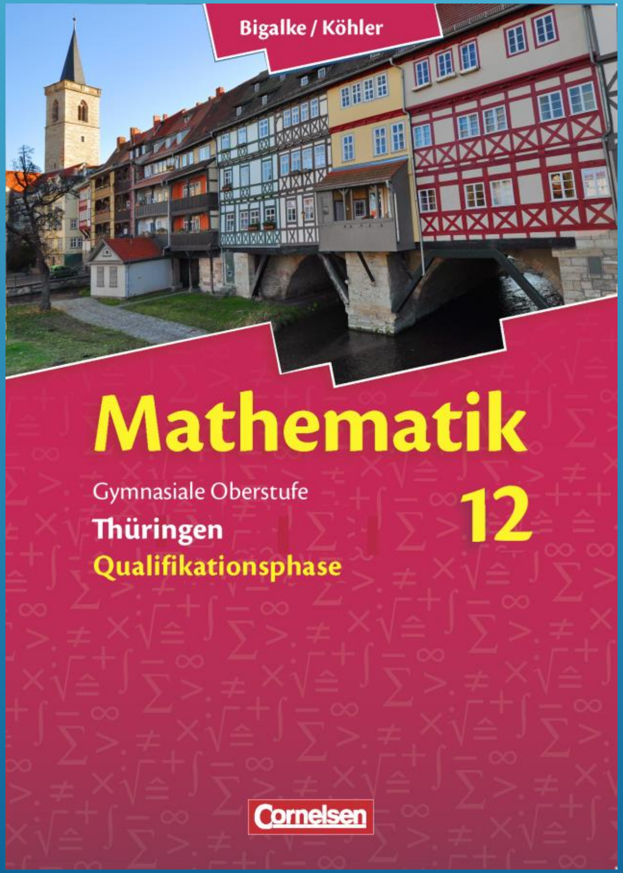
NORMALVERTEILUNG



Dr. Wilfried Zappe

Ilmenau

Erhöhtes Anforderungsniveau
Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus …

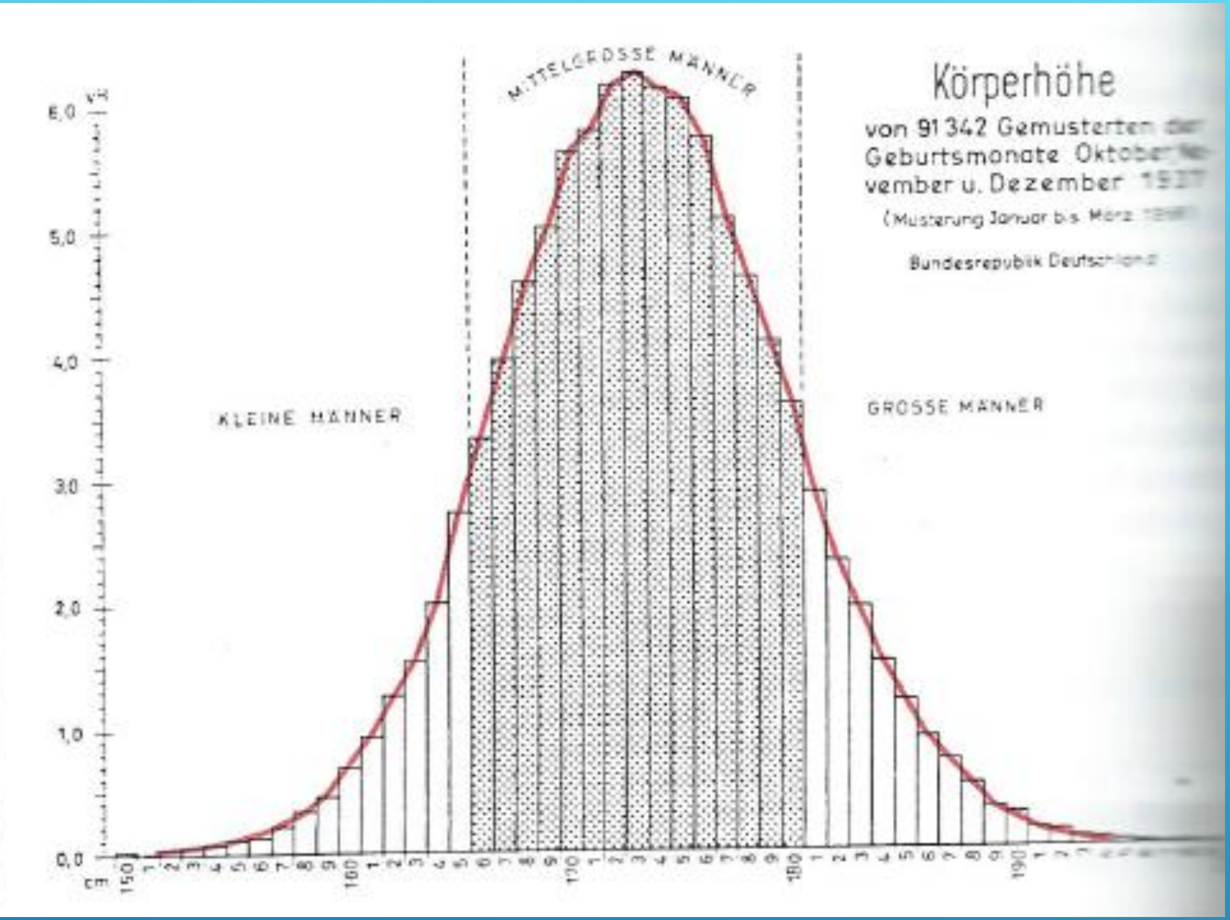
- exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen
- stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen

Bildungsstandards, Leitidee Daten und Zufall


Freistaat Thüringen
Mathematik
weiterentwickelter Lehrplan
für den Erwerb
der allgemeinen Hochschulreife
Thüringer Lehrplan 2013

Was fordert der Lehrplan für alle Schüler?
Der Schüler kann – normalverteilte Zufallsgrößen • an Beispielen erläutern, • grafisch darstellen sowie die Eigenschaften der Gaußschen Glockenkurve aus der Anschauung heraus beschreiben, • durch Erwartungswert und Standardabweichung charakterisieren, • zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme anwenden.

Die Normalverteilung stand schon mal im Thüringer Lehrplan, allerdings im Leistungskurs!



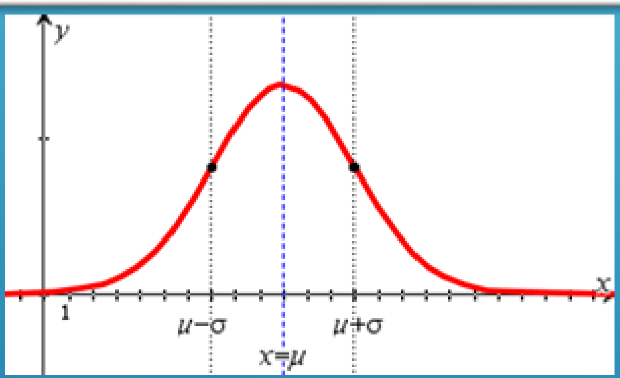
Ist diese Glockenform nicht erstaunlich, ja ehrfurchtgebietend?

Abbildung aus: Bart-Haller "Stochastik Leistungskurs", Ehrenwirth Verlag GmbH, München, 1994, S. 276.

Gilt für eine Funktion f über einem Intervall I = [a; b] oder (a; b): $\mathbf{f(x) \geq 0}$ **und** $\int_a^b \mathbf{f(x)dx = 1}$, so nennt man f eine ***Dichtefunktion*** oder ***Wahrscheinlichkeitsdichte***.

Eine reellwertige Zufallsgröße X nennt man ***stetig verteilte Zufallsgröße*** mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f, wenn für alle Werte c und d aus einem Intervall [a; b] oder (a; b) gilt: $\mathbf{P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx}$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

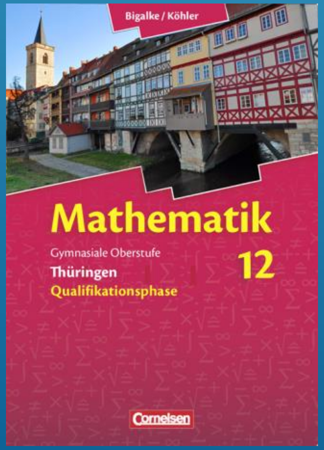


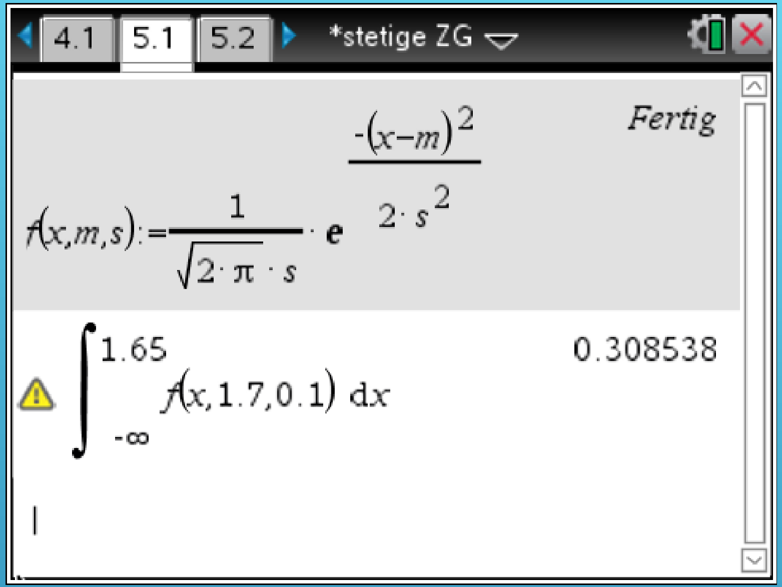
DEFINITION NORMALVERTEILTE ZUFALLSGRÖßE

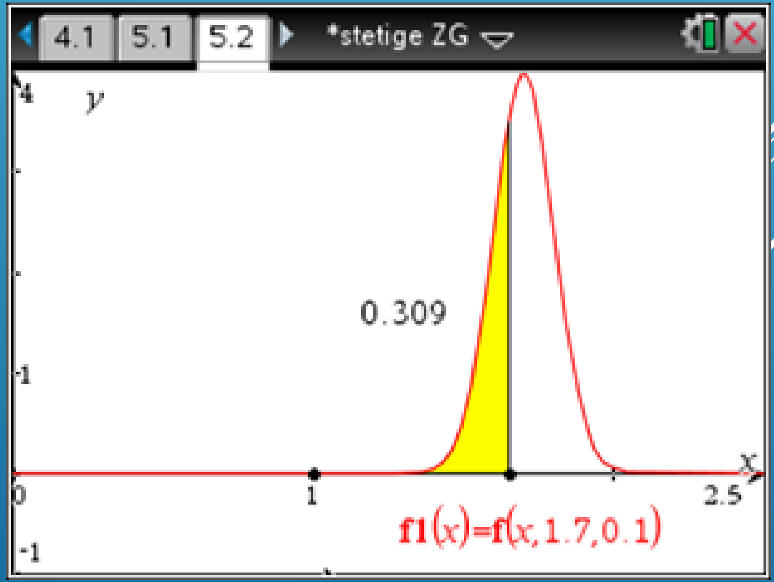
Beispiel: Körpergröße

Die Körpergröße der Oberstufenschüler eines Gymnasiums sei eine normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 1{,}70\ m$ und $\sigma = 0{,}1\ m$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler höchstens 1,65 m groß ist.

Aufgabe aus der Entwurfsfassung von:





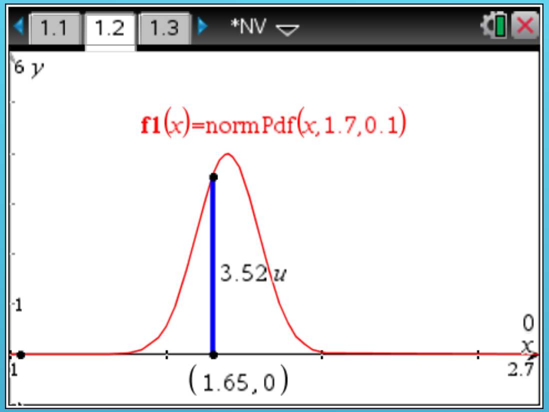


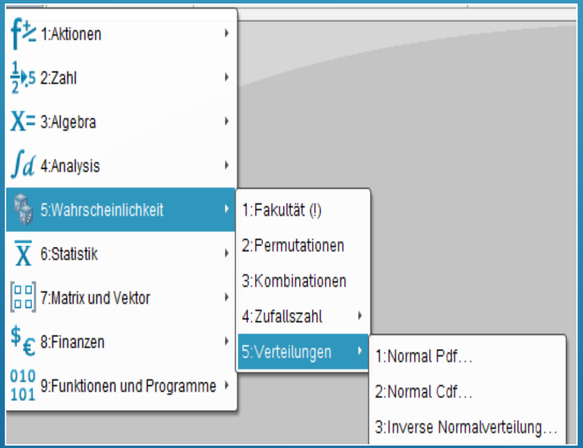
Beispiel: Körpergröße

Die Körpergröße der Oberstufenschüler eines Gymnasiums sei eine normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 1{,}70\ m$ und $\sigma = 0{,}1\ m$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler höchstens 1,65 m groß ist.

$normPdf(x, \mu, \sigma)$

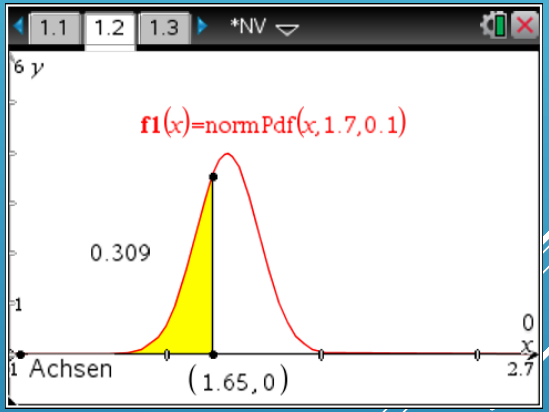
normPdf(1.65,1.7,0.1)	3.52065





$normCdf(a, b, \mu, \sigma)$

normCdf(0,1.65,1.7,0.1)	0.308538



Beispiel: Körpergröße

Die Körpergröße der Oberstufenschüler eines Gymnasiums sei eine normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 1{,}70\ m$ und $\sigma = 0{,}1\ m$.

In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Intervall liegen Körpergrößen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,68?

$$\int_{\mu-k}^{\mu+k} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\,dx = p$$

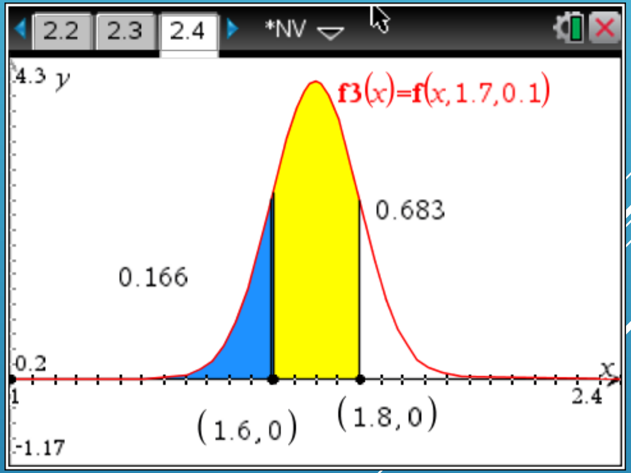
$$invNorm(p,\mu,\sigma)$$

$$\text{invNorm}\left(\frac{1-0.68}{2},1.7,0.1\right) \qquad 1.60055$$

1.5 | 2.1 | 2.2 | *NV

$$f(x,m,s):=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot s}\cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\cdot s^2}} \qquad \text{Fertig}$$

$$\text{nSolve}\left(\int_{1.7-k}^{1.7+k} f(x,1.7,0.1)\,dx=0.68,k,0\right) \qquad 0.099446$$



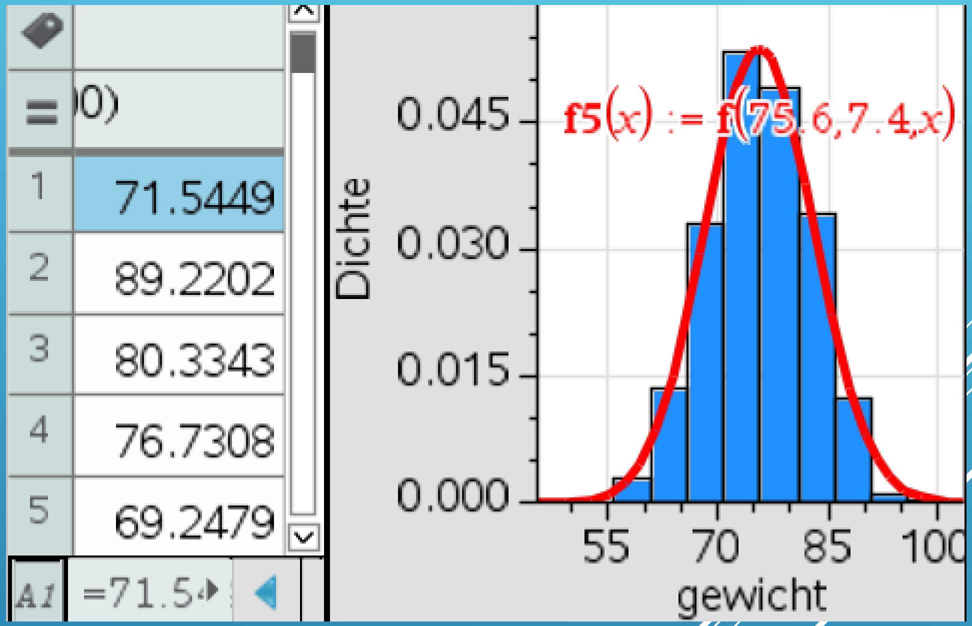
Abweichung vom Mittelwert ca. 0,1.
Es handelt sich also um Körpergrößen X mit $1{,}6 \le X \le 1{,}8$.
(Sigmaregeln)

SIMULATION

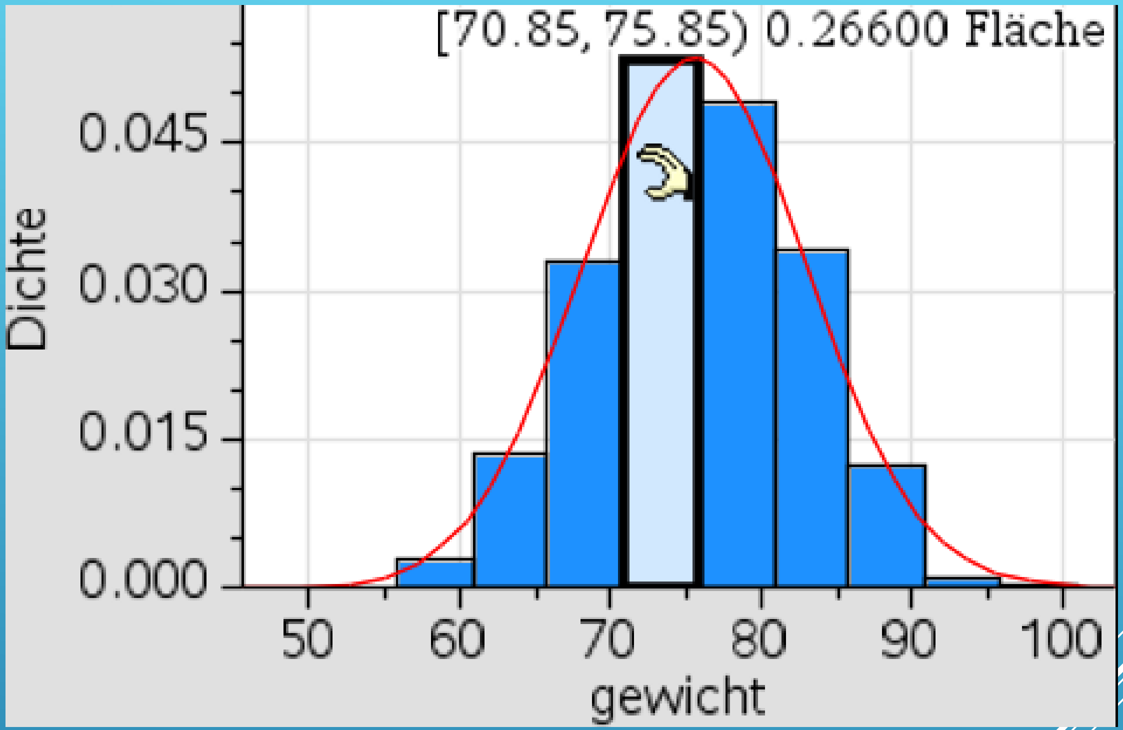
Das Körpergewicht (in kg) sei für eine Stichprobe von 500 Personen „normalverteilt"mit $\mu = 75,6$ kg und $\sigma = 7,4$ kg.

Simulieren Sie diesen Sachverhalt.

TI-Nspire: randnorm($\mu, \sigma[, n]$)



In einem Histogramm repräsentiert der Flächeninhalt einer Rechtecksäule die zum jeweiligen Intervall (Säulenbreite) zugehörige relative Häufigkeit.



Es gilt: $Dichte = \frac{relative\ Häufigkeit}{Säulenbreite}$

HISTOGRAMME LESEN

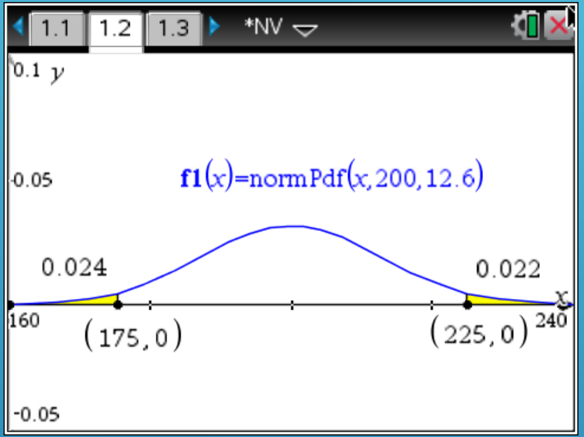
Jemand behauptet dass 20% der Bevölkerung Brillenträger sind. Um diese Behauptung zu testen, wird eine statistische Erhebung durchgeführt. Dabei werden unter 1000 Personen 158 Brillenträger festgestellt. Kann man hieraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% schließen, dass die Behauptung zutrifft?

Bearbeiten Sie diesen **Test** unter Verwendung der Normalverteilung!

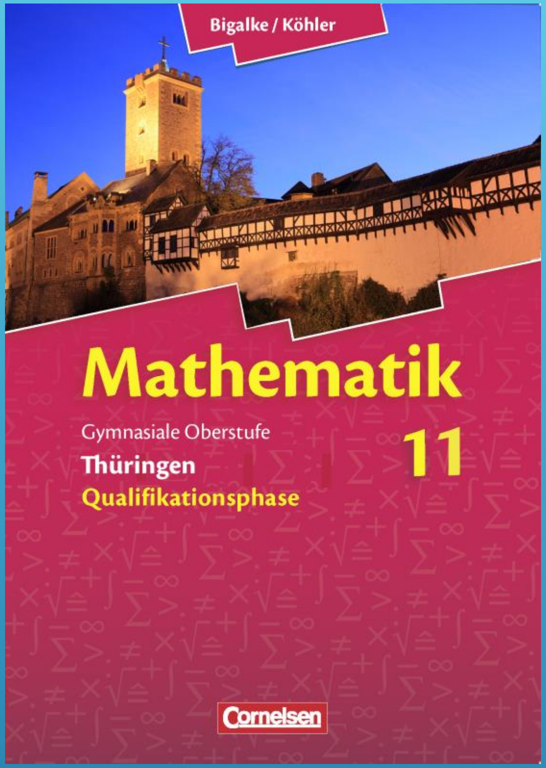
μ = 200; $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,2 \cdot 0,8} \approx 12,6$

normCdf(200−k,200+k,200,12.6)|k=24
0.943189

normCdf(200−k,200+k,200,12.6)|k=25
0.952758



Der Ablehnungsbereich wäre danach also {0, 1, …, 175}∪{225, …, 1000} .
Da das Stichprobenergebnis k = 158 im Ablehnungsbereich liegt, ist die Nullhypothese zu verwerfen.



- Hier konnte vieles nur „angerissen“ werden.
- Sie können mit uns auch ausführlichere Fortbildungen dazu vereinbaren.

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!