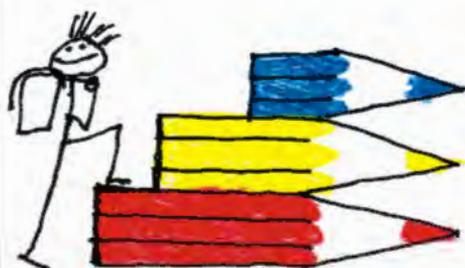


# Eigenständig lernen – Gemeinsam lernen

Mathematikunterricht in heterogenen Klassen  
im Kontext gemeinsamer Lernsituationen

Marcus Nührenböger  
Lilo Verboom



**Grundschule**

Steigerung der Effizienz des  
mathematisch-naturwissenschaftlichen  
Unterrichts

G8  
Mathematik

# Inhaltsverzeichnis

Eigenständig Lernen – Gemeinsam Lernen .....	2
1 Natürliche Differenzierung in Mathematikunterricht .....	4
1.1 Individualisierung durch offene Aufträge .....	7
1.2 Individualisierung durch Aufgabengeneratoren .....	7
1.3 Individualisierung durch Forscheraufgaben .....	9
2 Förderung des eigenständigen Mathematiklernens .....	10
2.1 Förderung der Selbstreflexion in Lerntagebüchern .....	11
2.2 Förderung der Selbstreflexion durch die Lehrkraft .....	13
3 Kooperatives Mathematiklernen .....	14
3.1 Voneinanderlernen im Austausch unter Kindern .....	16
3.2 Begleitung und Unterstützung des Austauschs durch die Lehrkraft .....	18
4 Gemeinsames Mathematiklernen in jahrgangsgemischten Klassen .....	19
4.1 Berücksichtigung des Spiralprinzips durch Parallelisierung .....	20
4.2 Gemeinsames Mathematiklernen an offenen Aufgabenstellungen .....	24
4.3 Gemeinsames Mathematiklernen an strukturanalogen Aufgabenstellungen .....	27
4.4 Gemeinsamer jahrgangsgemischter Unterricht, nicht nur in Klassen 1 und 2 .....	28
4.5 Helfen im jahrgangsgemischten Unterricht .....	29
5 Schlussbemerkungen .....	31
Literatur .....	32
Glossar .....	36
Anhang .....	41

## Impressum

Marcus Nührenböcker, Lilo Verboom  
Eigenständig lernen –Gemeinsam lernen

Publikation des Programms SINUS-Transfer Grundschule  
Programmträger: Leibniz-Institut für die



Pädagogik der Naturwissenschaften und  
Mathematik (IPN) an der Universität Kiel  
Olshausenstraße 62  
24098 Kiel  
www.sinus-an-grundschulen.de  
© IPN, August 2005

Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel  
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer  
Redaktion u. Realisation dieser Publikation:  
Dr. Kirstin Lobemeier  
Kontaktadresse: [info@sinus-grundschule.de](mailto:info@sinus-grundschule.de)

ISBN: 978-3-89088-187-4

## Nutzungsbedingungen

Das Kieler Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) gewährt als Träger der SINUS-Programme ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, vertreiben oder anderweitig nutzen. Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an. Trotz sorgfältiger Nachforschungen konnten nicht alle Rechteinhaber der in den SINUS-Materialien verwendeten Abbildungen ermittelt werden. Betroffene Rechteinhaber wenden sich bitte an den Programmträger (Adresse nebenstehend).

## **Mathematikunterricht in heterogenen Klassen im Kontext gemeinsamer Lernsituationen**

### **Modul G 8: Eigenständig Lernen – Gemeinsam Lernen**

Die Annahme, dass Kinder einer Klasse oder einer Jahrgangsstufe gleich viel im Hinblick auf die elementare Mathematik (v.a. auf die Arithmetik) wissen und leisten können, ist schon seit längerem durch eine Vielzahl an Studien, aber auch durch die alltäglichen Erfahrungswerte und Unterrichtsbeobachtungen der Lehrerinnen und Lehrer widerlegt worden. So kommen bereits Schulanfängerinnen und -anfänger mit unterschiedlichen Ausprägungen informellen mathematischen Wissens in die Schule. Während die einen bis oder über 100 zählen und sicher Rechenoperationen ausführen, die in der Regel zum Unterrichtsstoff des 2. Schuljahres gehören, gelingt es anderen noch nicht, die Zahlwortreihe bis 5 aufzusagen, kleine Anzahlen simultan zu erkennen und Ziffern zu benennen (vgl. hierzu zusammenfassend Schmidt 2004). Unterschiede in der Art des mathematischen Denkens zwischen Kindern können nicht nur zum Schulbeginn mehrere Entwicklungsjahre betragen, sondern auch am Ende der 2. Klasse. Die Bandbreite an Kompetenzen umfasst mehrere Jahre und spiegelt verschiedene Entwicklungsphasen einzelner Lernwege wider.

Vom ersten Schultag an ist es wichtig, dass der Unterricht die mathematischen Vorkenntnisse der Kinder und ihre individuellen Zugänge zur Mathematik ernst nimmt, denn jede Form des Mathematiklernens ist stets ein Weiterlernen. Diese Subjektorientierung erfordert ein Anknüpfen an die unterschiedlichen mathematischen Erfahrungen, Vorstellungen und Zugänge der Kinder. Im Unterricht sollte daher jedem Kind die Möglichkeit eröffnet werden, sein jeweiliges Mathematikwissen einzubringen und sich mit anderen Kindern wie auch mit den formellen Inhalten und Verfahren auseinander zu setzen und auszutauschen (vgl. Schipper 2005, Modul 3).

Im Begründungskontext einer „Pädagogik der Vielfalt“ (Prenzel 1995) und eines „Lernens von der Vielfalt“ (Speck-Hamdan 2000) kann Pluralität zu gezielter Individualisierung und Differenzierung im Unterricht führen und zugleich Konzepte herausfordern, die auf Reflexion, gegenseitiger Anregung und Kooperation fußen. Gerade im Fach Mathematik ist der Austausch zwischen Kindern auch im Rahmen individualisierender Unterrichtskonzepte von zentraler Bedeutung. Erst die vergleichende Auseinanderset-

zung mit den Ideen und Vorgehensweisen der Mitschülerinnen und Mitschüler vermag das eigene Repertoire an Vorstellungen und Strategien zu erweitern. Das individuelle Lernen wird – wie weiter unten noch auszuführen sein wird – notwendigerweise durch gemeinsames Lernen im sozialen Austausch ergänzt.

Im Zuge der Flexibilisierung der Schuleingangsphase werden in manchen Grundschulen mehrere Klassen (vornehmlich die Klassen 1 und 2) jahrgangübergreifend organisiert. Dies hat zur Folge, dass die Bandbreite an Leistungen noch mehr zunimmt: In einer jahrgangübergreifenden Klasse befinden sich auch Kinder, die nach einem Jahr Schulerfahrung bereits weit über den Zahlenraum bis 1000 addieren und subtrahieren sowie auch mit kleineren Zahlen schon multiplizieren und dividieren, aber auch Kinder, die noch elementare Schwierigkeiten beim Aufbau von Zahl- und Operationsvorstellungen im Zahlenraum bis 10 oder 20 besitzen. Jahrgangsgemischter Unterricht hat zur Folge, dass in einer Klasse keine Homogenität mehr angestrebt werden kann, denn die Unterschiede zwischen den Kindern treten deutlicher hervor, da sie mehrere „klassische Jahrgänge“ umfassen. Dies kann zur Weiterentwicklung von Unterrichtskonzepten führen, die verstärkt auf Individualisierung, Förderung von Selbstständigkeit, Kommunikation und Mitverantwortung beim Lernen sowie auf gemeinsames, sozial-kooperatives Lernen abzielen.

Im Folgenden werden zunächst Anregungen für Unterrichtskonzepte in den üblichen heterogenen Klassen gegeben, die aufzeigen, inwiefern Kinder entsprechend ihrer Lernpotentiale arbeiten können, ohne dass sie zugleich getrennt voneinander und auf isolierten Pfaden voranschreiten. Es wird Wert darauf gelegt, dass die Kinder einerseits Verantwortung für ihren Lernprozess übernehmen und den eigenen Weg reflektieren lernen. Andererseits sollen sie auch Gelegenheit finden, an den Lernprozessen anderer teilzuhaben, sich mit ihnen auszutauschen, kooperativ zusammen zu arbeiten und gemeinsam neue Einsichten zu entwickeln. Darüber hinaus werden Lernarrangements diskutiert, die vor dem Hintergrund jahrgangsgemischten Unterrichts auf dialogisches Mathematiklernen im Spannungsfeld von vorausschauendem und vertiefendem Denken ausgerichtet sind. Zwar spricht das Kapitel 4 den Mathematikunterricht in jahrgangsgemischten Klassen an, doch lassen sich die Anregungen leicht modifiziert auch in „normalen heterogenen Klassen“ umsetzen.

## **1 Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht**

Um der Heterogenität mathematischer Kompetenzen gerecht zu werden, sind in der Grundschule bereits in der Vergangenheit verschiedene Konzepte der Individualisierung von Lernprozessen umgesetzt worden. Weit verbreitet ist vor allem die von der Lehrkraft gesteuerte quantitative oder/und qualitative Differenzierung von Arbeitsaufträgen, die von den Schülerinnen und Schülern selbstständig (zumeist in Einzel- oder Partnerarbeit und im Rahmen organisatorisch geöffneter Unterrichtsformen) bearbeitet werden. Für verschiedene Leistungsniveaus werden unterschiedliche Arbeitsaufträge formuliert. Eine derartige Aufarbeitung der Inhalte – insbesondere des Übungsstoffs – nach unterschiedlichen Zielen, Schwierigkeitsgraden und Bearbeitungsformen erlaubt sicherlich eine differenzierte Beschäftigung und Beobachtung aller Kinder; allerdings ist bei der Vielfalt an subjektiven Kompetenzen eine genaue Passung zwischen Aufgabenzuweisung und individuellem Lernstand kaum zu erzielen. Es gehört zur alltäglichen Unterrichtserfahrung, dass bei einer noch so überlegten differenzierenden Steuerung durch die Lehrkraft Unter- oder Überforderung einzelner Kinder nicht zu vermeiden sind. So kann die Vorstellung, für die Förderung eines jeden einzelnen Kindes verantwortlich zu sein, als Last empfunden werden, insbesondere dann, wenn die entsprechenden differenzierenden Maßnahmen ausschließlich von der Lehrkraft selbst initiiert werden. Vor allem mit Blick auf den jahrgangsgemischten Unterricht werden häufig Befürchtungen geäußert, den unterschiedlichen Lernmöglichkeiten der Kinder nicht in geeigneter Weise gerecht werden zu können.

Als Hilfestellung sollen in diesem Modul dem Konzept der „Differenzierung von oben“ Möglichkeiten einer „Individualisierung von unten“ im Sinne einer „natürlichen Differenzierung“ gegenübergestellt werden. Vor dem Hintergrund der natürlichen Differenzierung eröffnet sich allen Kindern die Chance, entsprechend ihrer Lernpotentiale zu handeln und zu interagieren sowie selbstständiger zu werden.

Dies soll an einem Beispiel aus den ersten Schulwochen aufgezeigt werden. Ein Forscherbuch eignet sich zur individuellen Auseinandersetzung mit Zahlen in den verschiedensten Kontexten und Tiefen: Hierzu werden Zahlen, Zahlbeziehungen und -bedeutungen gesammelt und erforscht (ggf. auch näher erläutert), die zur Person gehö-

ren, die gemocht oder nicht gemocht werden, die im Haus oder auf der Straße anzutreffen sind, die besonders groß oder klein sind, die besonders lustig oder auffallend sind.

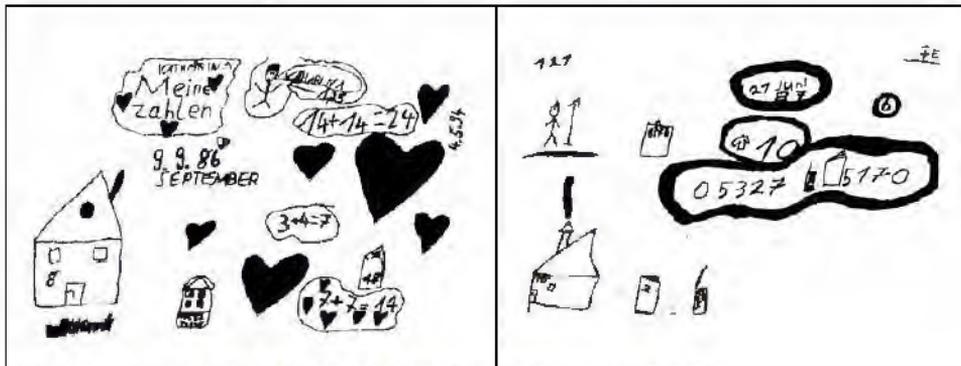


Abb. 1: Beispiele aus einem Zahlenforscherbuch (aus: Radatz u.a. 1998, S. 21)

Hier kann eine Zahlenkiste, die verschiedene Gegenstände aus der Welt der Zahlen enthält, einerseits eine Anregung für Kinder mit geringen Zahlerfahrungen sein, andererseits aber auch ein Anreiz sein, über die Art der verschiedenen Anordnungen von Zahlen auf einem Telefon, einem Taschenrechner oder einer Tastatur nachzudenken, diese zu vergleichen, fortzusetzen oder alternative Zahlentafeln zu erfinden.

**Anregung 1: Überlegen Sie sich, welche Zahlen ihre eigenen Schülerinnen und Schüler nennen und wie sie diese erläutern würden. Welche Produkte würden sich ähneln, welche würden sich unterscheiden?**

**Zu welchen verschiedenen Leistungen wären Ihre Kinder in der Lage und inwiefern könnten diese Unterschiede als Anregung für alle Kinder nützlich sein?**

Die von den Kindern dokumentierten Ideen liefern auf der einen Seite der Lehrkraft wertvolle Hinweise über den individuellen Leistungsstand und können zur Reflexion und Planung von Unterricht genutzt werden. Auf der anderen Seite wird jedes Kind dazu animiert, sich eigenständig seinem Leistungsvermögen entsprechend mit seinem Zahlenwissen auseinander zu setzen und dieses mit anderen auszutauschen. Während manche Schulanfänger ihre Zahl- und Mengenvorstellungen, ihre Zähl- und Zahl-schreibkompetenzen im kleinen Zahlenraum aufbauen und durch die Vielfalt an Betrachtungsweisen erweitern, vertiefen andere bereits ihre vorhandenen Kompetenzen durch den Ausbau des individuellen Zahlenraums und werden sich der Beziehungen einzelner Zahlen und Operationen bewusster.

Eigenständiges Lernen bedarf einer geöffneten Unterrichts- und Aufgabenkultur (vgl. Schipper 2005, Modul 3). Die mathematischen Zeichen und Symbole unterliegen im Unterrichtsprozess vielfältigen subjektiven Deutungen. Daher bedarf es einer offenen Unterrichtskultur, in der sich die Lehrerinnen und Lehrer dieser Mehrdeutigkeit der Zeichen bewusst sind und zugleich für angemessene Erklärungskontexte sorgen, die gerade den strukturellen Aspekt mathematischen Wissens berücksichtigen und somit konzeptuelles Lernen anregen (vgl. Steinbring 1999).

Offene Lernanlässe eröffnen eine Auseinandersetzung mit einer Aufgabe auf verschiedenen mathematischen Niveaus. Hierbei wird den Kindern die Zuständigkeit für die Auswahl des Schwierigkeitsgrades und des Umfangs ihrer Arbeit übergeben – die Lehrkraft begleitet zugleich die Kinder auf ihrem Weg, eigenverantwortlich zu arbeiten. Dabei arbeiten alle Kinder an einem Aufgabenthema, so dass die unterschiedlichen Bearbeitungsmöglichkeiten für das Mathematikwissen aller von Bedeutung sind.

Offene Aufgaben können zu unterschiedlichen Eigenproduktionen herausfordern. Das sind nach Selter (1995) mündliche oder schriftliche Äußerungen von Schülerinnen und Schülern, bei denen sie selbst entscheiden, wie sie vorgehen und wie sie ihre Vorgehensweisen und Ergebnisse darstellen. Dadurch wird den Kindern mehr Verantwortung für ihr eigenes Lernen zugestanden. In idealtypischer Weise lassen sich vier verschiedene Formen von Eigenproduktionen unterscheiden: „Die Schülerinnen und Schüler können dazu angeregt werden, selbst Aufgaben zu erfinden (*Erfindungen*), Aufgaben mit eigenen Vorgehensweisen zu lösen (*Rechenwege*), Auffälligkeiten zu beschreiben und zu begründen (*Forscheraufgaben*) oder sich über den Lehr-/Lernprozess zu äußern (*Rückschau bzw. Ausblick*)“ (Sundermann & Selter 2005, S. 127).

Im weiteren Verlauf werden zunächst geeignete Aufträge für selbstgesteuerte Aktivitäten vorgestellt. An Eigenproduktionen zu „Erfindungen“ und „Erforschungen“ (hierbei sind durchaus Überschneidungen möglich) wird exemplarisch deutlich, wie die Kinder derartige Arbeitsanweisungen eigenverantwortlich nutzen und das eigene Vorgehen und Darstellen reflektieren lernen können. Die Aufgabenbeispiele beziehen sich zwar schwerpunktmäßig auf jahrgangshomogene Lerngruppen, können aber durch leichte Abwandlungen auch auf heterogene Jahrganggruppen übertragen werden.

## 1.1 Individualisierung durch offene Aufträge

Eine fest umrissene Typologie offener Lernangebote gibt es nicht. Sie haben an unterschiedlichen Stellen im Unterricht ihren Platz: Sie eröffnen den Kindern Freiräume, um sich eigeninitiativ – aus der Perspektive der Vorschau – mit einem neuen Lerninhalt auseinander zu setzen und mathematische Ideen zu entfalten bzw. ihr „vorausgehendes Wissen“ (Rasch 2004, S. 5) einzubringen. Somit können eigene Grenzen ausprobiert, überschritten oder aber um bereits Erarbeitetes verweilend vertieft werden. Da die Kinder „Autoren“ ihrer eigenen Aufgaben sind, sind derartige Anregungen sowohl für jahrgangshomogene als auch für jahrgangsheterogene Klassen geeignet. Folgende Beispiele mögen die Bandbreite inhaltlich-offener Aufgabenstellungen verdeutlichen:

- Bilde Aufgaben mit dem Ergebnis 50. Bilde Aufgabenpaare zu Umkehraufgaben. Bilde alle Malaufgaben, die du schon kennst. Bilde 10 Malaufgaben, deren Ergebnisse kleiner als  $8 \times 6$  sind, und 10 andere, deren Ergebnisse größer als  $8 \times 6$  sind. Bilde eigene Zahlenhäuser, Zahlenfolgen, Zahlentafeln etc. Bilde eine *besondere* Zahlenmauer (z.B. mit einer geraden Zielzahl). Stelle zwei verschiedene Zahlen auf unterschiedliche Weise dar. Stelle eine Handvoll Haselnüsse, Bohnen etc. so dar, dass man auf einem Blick sehen kann, wie viele es sind ...
- Bilde verschiedene Geldbeträge mit drei, ... Münzen. Male ein Rechenbild oder schreibe eine Rechengeschichte zu einem besonderen Anlass ...
- Bestimme eine Spiegellachse und zeichne dazu sich spiegelnde Figuren ...

**Anregung 2: Suchen Sie aus Schulbüchern weitere Impulse heraus, die zu ähnlichen Eigenproduktionen auffordern oder denken Sie sich selbst derartige Aufgabenstellungen aus. Zu welchen Unterrichtsinhalten lassen sich leicht offene Lernangebote formulieren, zu welchen weniger leicht?**

**Welche offenen Aufgabenstellungen eignen sich (ggf. leicht variiert) auch für den Einsatz in jahrgangsgemischten Klassen?**

## 1.2 Individualisierung durch Aufgabengeneratoren

Bei diesen Aufgabenstellungen werden die Kinder angeregt, aus einem vorgegebenen Ziffern- bzw. Zahlenmaterial selber Rechenaufgaben zu bilden. Sie ersparen der Lehrkraft das Erstellen differenzierter Arbeitsblätter für die unterschiedlichen Leistungs-

stände ihrer heterogenen Lerngruppe. Aufgabengeneratoren stellen keine so hohen Ansprüche an die Kreativität und Selbstständigkeit wie die zuvor angeführten Aufträge. Daher unterstützen sie gerade die Entwicklung von Eigenverantwortung, ohne dass sofort Kinder durch eine zu große Offenheit der Aufgaben überfordert sein könnten.

Bei der Auswahl möglicher Aufgaben reflektieren die Kinder mehr oder weniger bewusst ihren eigenen Könnensstand im Hinblick auf das individuelle Aufgabenniveau (leicht, schwer, unsicher, über bisherige Zahlenraumgrenzen hinaus) und die eigenen Rechenoperationen. Zusätzliche Impulse können sie gezielt zur Selbsteinschätzung oder auch zu strategischen, lernmethodischen Vorgehensweisen durch Nutzen von Analogien und operativen Beziehungen anregen.

<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 10px;"> <math>+</math>   <math>-</math>   <math>/</math>   <math>\cdot</math>   <math>:</math> </div>				
13	9	17	24	10
19	23	15	30	50
27	14	45	70	25
100	59	37	83	35

1. Wähle selbst Zahlen und Rechenzeichen aus. Bilde damit Aufgaben und rechne sie aus.
2. Welche Aufgaben findest du leicht?
3. Welche Aufgaben findest du schwer?
4. Bei welchen Aufgaben hast du dir etwas Besonderes überlegt?

Abb. 2a: Aufgabengenerator „Zahlenset“

<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">0</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">5</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">10</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">60</div>	
<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">1</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">6</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">20</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">70</div>	
<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">2</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">7</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">+</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">30</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">80</div>
<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">3</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">8</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">40</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">90</div>	
<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">4</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">9</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">50</div>	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">100</div>	

Lege dir mit den Zahlenkarten Plusaufgaben und rechne sie aus.

Beispiel:  $7 + 1$  oder:  $24 + 3$  oder:  $51 + 23$

1. Wie kannst du möglichst schnell ganz viele neue Aufgaben finden und ausrechnen?
2. Findest du Aufgaben mit gleichem Ergebnis?
3. Hattest du einen Trick beim Suchen?

Schreibe ihn auf.

Abb. 2b: Aufgabengenerator „Rechnen mit Zahlenkarten“

Aufgabengeneratoren eignen sich auch für den jahrgangsgemischten Unterricht, denn sie können in bestimmten Zeitabständen mehrfach eingesetzt werden. Die Kinder können jeweils neue Aufgabenbildungen auf einem höheren Schwierigkeitsniveau vornehmen. Dadurch ergeben sich für sie klare Perspektiven für zielgerichtetes Lernen. Eigene Lernfortschritte könnten etwa in Lerntagebüchern (s.u.) verfolgt werden.

**Anregung 3: Stellen Sie Aufgabengeneratoren für die Klassenstufen 3 und 4 zusammen. Finden Sie auch Möglichkeiten, für den Bereich Geometrie derartige Generatoren zu entwickeln?**

Betrachten Sie die im Anhang abgebildeten Schülderdokumente zu einigen der oben aufgeführten offenen Aufgaben und Lernangebote. Diskutieren Sie: Welche Chancen sehen Sie in derartigen Aufgabenstellungen? Sehen Sie auch Probleme? Überlegen Sie: Welche Freiräume mit Gelegenheiten zur Selbstdifferenzierung schaffen Sie bereits in Ihren Lerngruppen? Wie gehen die Lernenden damit um?

### 1.3 Individualisierung durch Forscheraufgaben

Wenn Kinder Zahl- bzw. Aufgabenbeziehungen untersuchen, Auffälligkeiten und Zusammenhänge entdecken, beschreiben und u.U. auch begründen, spricht man von Forscheraufgaben (vgl. Selter 2005, Modul 2 und Verboom 2004). Die Kinder haben hierbei vor allem die Wahl der Vorgehensweise und der Darstellungsform.

**Aufgabe:** Rechne die Zahlenmauern aus.  
 Betrachte die Zahlenmauern. Welche Entdeckungen kannst du machen? Schreibe auf!

**Tipp:** Schaue dir genau die einzelnen Schichten der Zahlenmauern an.  
 Vergleiche die Zahlenmauern miteinander.

Alle Einer sind gleich geteilt.  
 Bei der zweiten Reihe sind ungerade Zahlen und bei der 3. Reihe gerade Zahlen und in der vierten Reihe auch und in der fünften Reihe auch

Abb. 3: Forscheraufgaben zu Zahlenmauern mit Schülderdokumenten

Am obigen Beispiel zu „Zahlenmauern“ wird ersichtlich, wie sich jedes einzelne Kind bei Forscheraufgaben mit seinen Fähigkeiten und subjektiven Vorlieben einbringen kann. Die zwei Schülerdokumente zeigen auf, welche unterschiedliche Strukturen für die Kinder von Bedeutung waren und wie unterschiedlich sie diese dargestellt haben.

Forscheraufgaben können auch so offen formuliert werden, dass sich unterschiedliche Jahrgänge mit ein und demselben Auftrag auseinandersetzen können. Der folgende Forscherauftrag zu Zahlenmauern kann beispielsweise von Kindern unabhängig ihres Einschuljahrgangs bearbeitet werden. Eine Selbstdifferenzierung findet durch die Wahl des Umfangs der eigenen Zahlenmauer (Dreier-, Vierer-, Fünfer-, Sechsermauer) sowie durch das von den Kindern verwendete Zahlenmaterial statt.

**Thema: Vertauschen von Zahlen in Zahlenmauern**

**Was passiert mit der Zielzahl, wenn man in einer Zahlenmauer unten Zahlen vertauscht?**

**Erfinde eine eigene Zahlenmauer. Vertausche immer 2 Zahlen in der unteren Reihe.**

- a) Wann ändert sich die Zielzahl, wann nicht?
- b) Wie viele verschiedene Zielzahlen findest du?
- c) Wie erreichst du die höchste Zielzahl?
- d) Wie viele Möglichkeiten findest du, die Zahlen zu tauschen?

Bei ihren Erkundungen werden die Kinder unterschiedlich vorgehen: Einige probieren spontan und unsystematisch aus, andere vertauschen eher planvoll die Zahlen; einige werden vielleicht auch schon die Forscherfragen nach ersten Untersuchungen vorausschauend beantworten. Ebenso verschieden wie die Erkundungen wird auch der Abstraktionsgrad der Entdeckungen und Versprachlichungen sein: Während manche Kinder nur einzelne Zahlen betrachten und beispielhaft benennen, überblicken andere Kinder das gesamte Zahlenmaterial, setzen es miteinander in Verbindung und formulieren mehr oder weniger abstrakt erkannte Zusammenhänge (vgl. Verboom 2005).

## **2 Förderung des eigenständigen Mathematiklernens**

Selbstgesteuertes Lernen in offenen Lernsituationen stellt hohe Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler. Es kann nicht erwartet werden, dass Kinder ohne Hinführung zu Eigenproduktionen zu hohen Graden an mathematischer Produktivität fähig sind. Um sich gründlich und erfolgreich mit mathematischen Gegenständen oder Fragestellungen auseinanderzusetzen, müssen die Kinder vom ersten Schuljahr an kontinuierlich mit

offenen Aufgabenstellungen konfrontiert und auf ihrem Weg zum autonomen, reflexiven Lernen beraten und unterstützt werden.

Eigenständiges Lernen im Kontext offener Lernangebote setzt den Erwerb von Arbeitstechniken, Lernstrategien und Einstellungen voraus, denn das einzelne Kind übernimmt die Verantwortung zur Planung und Steuerung seines Lernprozesses. Von Anfang an ist die Einstellung zu fördern, dass schulische Aufgabenstellungen nicht bedeuten, etwas „abzuarbeiten“, sondern etwas für sich – häufig auch mit anderen zusammen – zu erarbeiten. Dazu müssen die Kinder in Bezug auf ihren Arbeitsprozess Bewusstheit erlangen über die Planung ihrer Vorgehensweisen, über ihre spontanen Einfälle, über die Art ihrer Darstellung von Sachverhalten, aber auch über ihre Schwierigkeiten, ihre (heimlichen) Zielsetzungen und ihre Lernfortschritte. Dabei kann es hilfreich sein, wenn Kinder sich gegenseitig von bedeutsamen Lernereignissen oder Reclamungen berichten oder diese in ein Lerntagebuch übertragen werden.

Wenn Schülerinnen und Schüler an offenen Aufgaben arbeiten, besteht allerdings (insbesondere auch im jahrgangsgemischten Unterricht) die Gefahr, dass sie sich bewusst oder unbewusst unter- oder überschätzen. Damit Offenheit nicht zur Beliebigkeit wird oder zu rein assoziativen Handlungen führt, reicht es nicht aus, die Kinder lediglich „machen“ zu lassen. Es gehört zur Aufgabe der Lehrkraft, den Prozess des Erwerbs von Eigenständigkeit während des Arbeitsprozesses zu begleiten und die eigenen Lernerfahrungen der Kinder zu fördern. Die Kinder benötigen Beratung, Unterstützung und Anregung, um das eigene Potential an Lernmöglichkeiten auszuschöpfen.

## **2.1 Förderung der Selbstreflexion in Lerntagebüchern**

Eine strukturierende methodische Rahmung für ein bewusstes Gestalten des Lernprozesses geben sog. Lerntagebücher. Diese sind ein wichtiges methodisches Instrument des eigenständigen Lernens und des individuellen Aufbaus von Fachkompetenz. Die meisten konzeptionellen Aufarbeitungen für den Mathematikunterricht lassen sich auf die Idee des „Reisetagebuchs“ von Ruf & Gallin (1999) zurückführen. Im Folgenden wird eine knappe Übersicht über drei Ansätze für den Mathematikunterricht gegeben:

Reisetagebuch	Rechentagebuch	Sammelbuch
(vgl. Ruf & Gallin 1999, S. 91ff.) Alle Überlegungen, Lösungsansätze, offenen Fragen, Ergebnisse und Erkenntnisse während des Lernprozesses werden schriftlich dokumentiert.	(vgl. Sundermann & Selzer 1995, S. 30ff.) Die individuellen Lösungswege werden während des Lösungsprozesses aufgezeichnet. Anschließend werden Gedanken zur Problemlösung, aber auch emotionale Befindlichkeiten verschriftlicht.	(vgl. Beck 2002, S. 21) Jedes Kind notiert nach der Auseinandersetzung mit zentralen Inhalten des Mathematikunterrichts einige ihm bedeutsam erscheinende Gedanken und erläutert diese u.U. noch an eigenen Aufgabenbeispielen.
Datum: Wann? Thema: Welches Thema? Auftrag: Was muss ich tun? Orientierung: Wozu machen wir das? Spuren: Welchen Weg beschreite ich bei der Lösung? Rückblick: Wo stehe ich? Rückmeldung: Wer kann mir weiterhelfen?	Schreibe auf, was du gedacht hast: Fragen, Meinungen, Ideen Schreibe auf, wie du gerechnet hast: Mit Worten oder am Rechenstrich. Schreibe auf, warum du so gerechnet hast. Schreibe auf, welche Fragen oder Schwierigkeiten du hast.	Leitfrage: Wie bist du zu deinen Arbeitsergebnissen gekommen? Wie bist du vorgegangen?

**UCI** Nina Nina  
Datum: 2. 9. 93

In den UCI - Klassen

Im Kino 15 sitzen 274 Personen. Es kommen noch 167 dazu

$$274 + 100 + 7 + 60$$

$$274 + 100 = 374$$

$$374 + 7 = 381$$

$$381 + 60 = 441$$
  

$$280 + 100 + 60 + 7 = 447$$

$$280 + 100 = 380$$

$$380 + 60 = 440$$

$$440 + 7 = 447$$

Es ist eine Planaufgabe, weil 167 davon kommen. Ich habe erst die hundert dazu gerechnet dann die zehn und zuletzt die einen. Ich finde die zweite Möglichkeit die ich gerechnet habe leichter. So hatte ich keine Schwierigkeiten. Die Aufgabe war leicht für mich.

Abb. 4: Eine Seite aus dem Rechentagebuch von Nina (aus: Sundermann & Selzer 1995, S. 31)

## 2.2 Förderung der Selbstreflexion durch die Lehrkraft

Die Lehrkraft kann als Moderatorin von Lernprozessen mit Impulsen die Aufmerksamkeit eines Kindes oder einer Gruppe auf bestimmte Aspekte des Sachgebiets lenken und dadurch zusätzliche Lernchancen eröffnen. Ihre Aufgabe während der selbstständigen Arbeit der Kinder erschöpft sich somit nicht ausschließlich in einer zurückhaltenden Beobachterrolle. Diese Form des Austausches geht einher mit einer Haltung der Lehrkraft, die die Kinder als mathematisch Denkende ernst und wichtig nimmt.

<p>Ich mache BoSprünge.</p> <p>5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125 130 135 140 145 150 155 160 165 170 175 180 185 190 195 200</p> <p>Mache nochmals 5er Sprünge. Beginne nicht bei Null, sondern bei 2.</p> <p>Ich springe von 2 bis auf 7 Ich springe von 7 bis auf 12 Ich springe von 12 bis auf 17 Ich springe von 17 bis auf 22 Ich springe von 22 bis auf 27 Ich springe von 27 bis auf 32 Ich springe von 32 bis auf 37 Ich springe von 37 bis auf 42 Ich springe von 42 bis auf 47</p> <p>Ich hab einen Trick gemerkt. Wenn man bei 2 ist muss man einfach 5 weiter zählen, dann kommt man auf 7. Dann ist mir etwas in den Sinn gekommen, wenn ich bei 7 bin muss ich einfach studieren welche Zahl als nächste 2 hat.</p> <p>Ich weiß wo hin das man kommt, man kommt auf 12.</p>	<p>Anna <math>4 \cdot 5 = 20</math> <del><math>100 + 10 = 110</math></del> <math>50 : 10 = 50</math> <math>100 + 10 = 110</math> <math>9 : 3 = 30</math> <del><math>4 : 3 = 12</math></del> ① <math>3 + 4 = 7</math> <del><math>23 + 4 = 27</math></del> <math>3 \cdot 5 = 15</math> <del><math>100 : 50 = 20</math></del> <math>9 \cdot 10 = 90</math> <del><math>10 - 4 = 6</math></del> <math>8 : 4 = 20</math> <math>10 \cdot 10 = 100</math> <math>10 - 6 = 40</math> ② <math>10 - 8 = 20</math> <math>10 - 10 = 00</math></p> <p>① Lida Anna, findest du noch andere Aufgaben, die zu diesen beiden Aufgaben passen? <math>3 + 4 = 7</math> <math>23 + 4 = 27</math> <math>13 + 4 = 17</math> <math>23 + 4 = 27</math> <math>43 + 4 = 47</math> <math>53 + 4 = 57</math></p> <p>② Kannst du noch ein ähnliches Rätschen bilden? Fange mit der 30 an. Was fällt dir auf? <math>30 - 4 = 26</math> <del><math>30 - 10 = 20</math></del> <del><math>30 - 15 = 15</math></del> Bei dem 2. Paket kommt hinten die 5er Reihe rückwärts raus. Und bei der 5er Reihe vorwärts die 5er Reihe rückwärts ist deshalb weil vorne immer die 30 steht und weil die 5er Reihe vorwärts da ist.</p>
<p>Abb. 5a: Schülerdokument zu einem Auftrag von Ruf &amp; Gallin (1999, S. 56): „Denke dir eine Sprunglänge aus. Schreibe auf, bei welchen Zahlen du (...) landest.“ Ein zusätzlicher Impuls führt zu der Entdeckung eines „Tricks“.</p>	<p>Abb. 5b: Schülerdokument zum Aufgabengenerator „Zahlenset“: Anna ist vor allem durch den zweiten Impuls zu weiterem Ausprobieren und Untersuchen angeregt worden. Sie macht für sich weit über das Lernangebot hinaus gehende Lernerfahrungen.</p>

Die abgebildeten Schülerdokumente lassen erkennen, wie persönliche Rückmeldungen durch die Lehrkraft die Auseinandersetzung eines Kindes mit einem Thema vertiefen oder sogar zu neuen mathematischen Erkenntnissen führen können. Die professionelle Beratung und Unterstützung der Lehrkraft setzt Fachwissen sowie methodisch-

didaktische und diagnostische Kompetenzen voraus, um ergiebige Ansätze in den Ideen der Kinder wahrzunehmen, richtig zu interpretieren und weitere Lernchancen hinsichtlich des Ausbaus mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten zu erkennen und durch geeignete Impulse anzuregen. Dies stellt gerade in einer jahrgangsgemischten Klasse eine besondere Herausforderung dar, in der komplexe Unterrichtssituationen entstehen und organisiert werden.

**Anregung 4: Sehen Sie sich die Schülerdokumente zu offenen Aufgabenstellungen im Anhang an. Wählen Sie diejenigen aus, bei denen weiterführende Anregungen für das Kind zu einer größeren Bewusstheit erster Ideen führen könnten. Formulieren Sie die entsprechenden Fragen oder Impulse.**

### **3 Kooperatives Mathematiklernen**

Individualisierte, selbst gesteuerte Lernprozesse laufen in unsicheren Bahnen, wenn sie nicht sozial integriert werden und wenn die einzelnen Kinder mit ihren Ideen und Ansichten ausschließlich nebeneinanderher lernen. Gerade das Mathematiklernen auf eigenen Wegen bedarf des Austauschs mit anderen und des Aushandelns von Sichtweisen, Vorstellungen und Lösungswegen. Mathematisches Wissen entwickelt sich grundsätzlich im Kontext sozialer und individueller Deutungsprozesse. Das mathematische Wissen wird somit durch soziale Aktivitäten und individuelle Interpretationen im Unterricht konstruiert (vgl. Steinbring 2000). Die wechselseitigen Interpretationen der Beteiligten lassen im Gespräch ein als gemeinsam-geteilt geltendes Verständnis über die mathematischen Zeichen, Strukturen, Objekte und Kontexte entwickeln. Die soziale Integration des eigenen Wissens, die sich im fachbezogenen Austausch mit anderen Kindern äußert, stellt zudem eine wesentliche Bedeutung für den Aufbau und die Aufrechterhaltung der Lernbereitschaft dar. So ist die Reflexion eigener Ideen und der Vorstellungen anderer Kinder ein wesentliches Moment selbst gesteuerten Lernens, denn die Kinder werden sich des eigenen Lernens bewusster und erweitern das eigene Wissen. Das Wissen wird flexibler und vom Kontext unabhängiger, indem eigene Ideen sprachlich verständlich erläutert und argumentativ ausgetauscht werden und man sich zugleich mit anderen Perspektiven auseinandersetzt. Ferner schaffen kooperative Lernprozesse ein produktives, motivierendes Arbeitsklima, in dem soziale Kompetenzen geschult werden.

Kooperative Lernprozesse sind vor allem dann besonders effektiv, wenn Kinder auf ihre sozial-interaktive Rolle im Arbeitsprozess vorbereitet worden sind und somit lernen, miteinander ehrlich und gegenseitig unterstützend zu arbeiten, verständlich miteinander zu sprechen und Konflikte konstruktiv gemeinsam zu lösen. Ansonsten neigen manche Kinder dazu, auf möglichst einfachem Niveau miteinander zu agieren. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass die Aufgabe derart gestellt wird, dass sie verschiedene Lösungswege zulässt, wechselseitigen Austausch erfordert und dass die Gruppe für kollektive Lernprozesse in die Verantwortung genommen wird (vgl. Cohen 1993; Johnson & Johnson 1994; Röhr 1997). Gerade zu leichte oder wenig komplexe Aufgaben bergen die Gefahr, dass Kinder sie nicht gemeinsam bearbeiten, da sie schneller und effektiver in Einzelarbeit gelöst werden können. Ferner bedarf es auch der direkten gegenseitigen Unterstützung und Reflexion in der Gruppe ebenso wie der Forderung, dass die Kinder einerseits individuell verantwortlich, andererseits aber auch positiv abhängig sind und sich gegenseitig anregen (s. für einen allgemeinen Überblick Weidner 2003 oder Gräber & Kleuker 1998, [www.sinus-transfer.de](http://www.sinus-transfer.de)). Boaler (2005) betont diesbezüglich, dass alle Kinder nicht nur für ihren eigenen Lernprozess verantwortlich sind, sondern auch für den der mit ihnen zusammenarbeitenden Kinder. Dies stärkt sowohl die Identifikation mit dem Fach als auch die Qualität der Interaktion und des interaktiv aufgebauten Mathematikwissens. Sie schlägt beispielsweise vor, dass die Lehrkraft die Gruppenarbeitsprozesse begleitet und einzelne Kinder aus der Gruppe zu einem Inhalt befragt. Sollte das Kind die Frage nicht umfassend beantworten können, teilt sie lediglich mit, später wieder zu kommen. In der Zwischenzeit arbeitet die Gruppe daran, dass alle Kinder die Aufgabe substantiell lösen können. Somit werden nicht Informationen mehr oder weniger erfolgreich weitergegeben, sondern es findet eine kommunikative Genese an Bedeutung und Verständnis ohne direkte bzw. sofortige Unterstützung der Lehrkraft statt.

In der Gruppenarbeit, aber auch in gemeinsamen Reflexionsphasen fällt es Kindern in der Grundschule häufig schwer, mathematische Erkenntnisse und Lösungswege sprachlich zu erläutern. Als hilfreich erweist sich zum einen die Betonung der Kommunikation im Mathematikunterricht vom ersten Schultag an. Wenn Kinder es gewohnt sind, über ihre eigenen Vorstellungsbilder und Strategien zu sprechen und diese mit anderen auszutauschen, schulen sie im Laufe der Zeit ihr Sprachrepertoire für mathematische Diskurse. Zum anderen hilft es Kindern häufig, wenn sie ihre Ideen an einem repräsentati-

ven Beispiel (ggf. mit Materialien oder weiteren Darstellungen) mündlich oder schriftlich näher erläutern. Auch wenn die Erklärung nicht unbedingt mit dem originalen Denkweg übereinstimmt, führt sie doch dazu, dass das Kind sich selbst seines Wissens und weiterer mathematischer Zusammenhänge bewusster wird, während zugleich andere ihr eigenes Wissensnetz umstrukturieren.

### **3.1 Voneinanderlernen im Austausch unter Kindern**

Beim Austausch über Erfindungen, Erkenntnisse und Vorgehensweisen gilt es, möglichst viele Schülerinnen und Schüler zum Vorstellen, Erklären, Nachfragen und Vergleichen zu aktivieren. Die direkteste Form der Kommunikation ergibt sich beim (informellen) Partneraustausch. Auch bei der Auseinandersetzung mit ausgestellten Eigenproduktionen („Entdeckerwand“, „Forscherwand“) kommen Kinder spontan ins Gespräch über ihre Einfälle und Lösungen.

„Erfinderrunden“ bieten eine Struktur für die Betrachtung der Arbeiten ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler. Sie laufen nach einem festgelegten Ritual ab: Einige Kinder heften ihre Eigenproduktionen, die sie zum Zweck der Veröffentlichung zuvor groß und deutlich dargestellt haben, an eine Tafel an. Bevor das „Erfinderkind“ selbst zu Wort kommt, erörtern die anderen Kinder die jeweilige Eigenproduktion (vgl. Schütte 2002).

In Rechen- oder Strategiekonferenzen werden die Arbeitsergebnisse und Lösungswege einzelner Kinder, aber auch Entdeckungen von Auffälligkeiten und Beziehungen in einer Gruppe betrachtet, miteinander verglichen, auf Richtigkeit überprüft und ggf. sachlich kritisiert. Dabei vermögen Leitfragen das voneinander Lernen stärker zu strukturieren und bewusst den Blick von der singulären Ausgestaltung der Eigenproduktionen auf andere, differierende Sichtweisen zu lenken.

Im engeren Sinne geht es darum – in Analogie zur Intention von Schreibkonferenzen –, dem einzelnen Kind Rückmeldung über persönliche Aufzeichnungen zu geben. Im weiteren Sinne wird bezweckt, über verschiedene Lösungsversuche nachzudenken und sie zu vergleichen, um das eigene Repertoire an Lernstrategien zu erweitern. Nachfolgend werden wesentliche Leitfragen für eine Konferenz zusammengestellt (vgl. Sundermann & Selzer 1995; Franke 2002):

- Wie hat das „Autorenkind“ gerechnet? Wie ist es auf die Idee gekommen?

- Wie hast du deine Aufgabe gelöst? Erkläre deinen Weg.
- Ist der Erklärungsversuch des „Autorenkindes“ verständlich? Ist der Rechenweg geschickt? Ist das Ergebnis richtig?
- Wer hat einen anderen Weg gewählt? Was ist daran anders?

Um die Erfahrungen aus Mathematikkonferenzen zu vertiefen, ist es sinnvoll, möglichst zeitnah eine weitere, ähnlich strukturierte Aufgabenstellung anzubieten. So können Kinder das Erfahrene direkt anwenden und den Nutzen für sich reflektieren. An einem Beispiel zu operativen Päckchen wird diese Verbindung verdeutlicht:

Entdeckerpäckchen
Rechne aus! Wie geht es weiter?
$10 + 20 = \underline{\quad}$
$12 + 20 = \underline{\quad}$
$14 + 20 = \underline{\quad}$
$16 + 20 = \underline{\quad}$
$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$
$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$
Was hast du entdeckt? Zeichne und schreibe! Hast du eine Idee, warum das passiert ist?

Entdeckerpäckchen
Was hast du in der Rechenkonferenz Interessantes und Neues erfahren? Schreibe es auf.
Vielleicht helfen dir die Ideen aus der Rechenkonferenz bei diesen Entdeckerpäckchen!
$14 - 12 = \underline{\quad}$
$14 - 10 = \underline{\quad}$
$14 - 8 = \underline{\quad}$
$\underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$
$\underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$
Was hast du entdeckt? Zeichne und schreibe! Hast du eine Idee, warum das passiert ist?

Ergebnisse von Unterrichtsversuchen zeigen, dass ein strukturiert gestalteter Austausch unter den Kindern zu einem Lernzuwachs führen kann, sei es in Bezug auf die Erweiterung von Kriterien für Untersuchungen von Zahlbeziehungen („Was kann ich mir alles ansehen? Wo kann ich evtl. etwas berechnen?“) oder in Bezug auf das Repertoire an zeichnerischen Darstellungsweisen oder die Erweiterung des eigenen Wortschatzes.

**Anregung 5:** Setzen Sie sich mit einem der folgenden Zahlenfelder auseinander und berücksichtigen Sie verschiedene Darstellungsformen. Halten Sie Ihre Entdeckungen fest und tauschen Sie sich aus. Untersuchen Sie das andere Zahlenfeld und überprüfen Sie, ob Sie Ihr Repertoire an Vorgehensweisen und an Darstellungsformen durch den gemeinsamen Austausch erweitern konnten.

Überlegen Sie sich anschließend geeignete Leitfragen für eine Rechenkonferenz zu dieser Aufgabe.

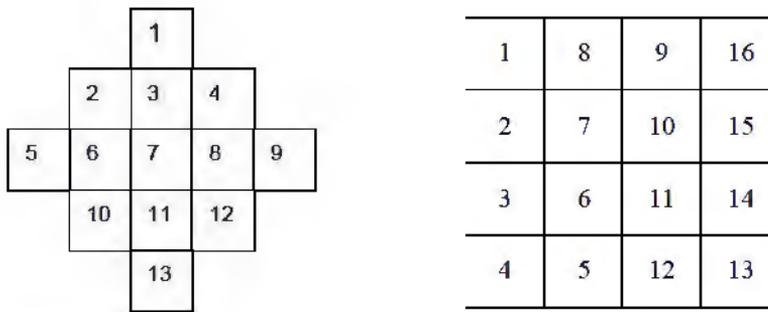


Abb. 6: Zahlenfelder

### 3.2 Begleitung und Unterstützung des Austauschs durch die Lehrkraft

Natürlich hat auch der Austausch im Klassenverband bzw. während der Gruppenarbeit mit der Lehrkraft einen besonderen Stellenwert im Kontext des Spannungsfeldes zwischen dem Lernen auf eigenen Wegen und dem Lernen voneinander. Hierbei nimmt die Lehrkraft die Rolle als Moderator ein, der auf der einen Seite Aktivitäten beobachtet und die Kinder selbstständig arbeiten lässt, auf der anderen Seite zugleich die Schülerinnen und Schüler sensibel unterstützt und berät: Ideen einzelner Kinder können aufgegriffen und fokussierend in den Blick gerückt werden, planvolle und zweckmäßige Vorgehensweisen können herausgestellt und dadurch fachliche Arbeitsweisen (z.B. systematisches Ausprobieren, Ordnen, strukturierendes Betrachten und Vergleichen, Erkennen und Nutzen von operativen Beziehungen, Analogien und Gesetzmäßigkeiten) gezielt gefördert werden. Bedeutsam erscheint hierbei, dass sich die Lehrkraft über die Offenheit der Mathematik bewusst ist und den mathematischen Zeichen angemessene Erklärungskontexte an die Seite stellt, die mathematische Beziehungen und Strukturen verkörpern (vgl. Steinbring 1999). Indem die Lehrkraft die Ideen von Kindern aufgreift und sie gezielt in Beziehung zu anderen setzt, fördert sie ferner das flexible Denken und hebt zugleich den Status des jeweiligen Kindes an (vgl. Boaler 2005).

Die Lehrkraft kann das gemeinsame Repertoire an zeichnerischen und symbolischen Darstellungsmitteln (z.B. einkreisen, einfärben bestimmter Zahlen oder Positionen, Pfeile, Kurznotationen, Fachbegriffe ...) durch zusätzliche Anregungen erweitern oder zusammenfassend visualisieren, damit es den Kindern bei weiteren Arbeiten zur Verfügung steht. Durch derartige Maßnahmen wird der Aufbau lernmethodischer Kompeten-

zen bei den Kindern gefördert. Dies gibt den Kindern das notwendige Selbstvertrauen, Lernaktivitäten eigenständig zu organisieren und Aufgabenstellungen auf eigenen Wegen anzugehen, die durch die Formen der natürlichen Differenzierung eröffnet werden.

#### **4 Gemeinsames Mathematiklernen in jahrgangsgemischten Klassen**

In einer jahrgangsgemischten Lerngruppe werden natürliche Kommunikations- und Kooperationsanlässe geschaffen, die in einer auf Homogenität angelegten Lerngruppe so nicht möglich sind. Hier kann die Verschiedenheit der Kinder in besonderer Weise zur Stärkung der Einsicht in die Fachstrukturen genutzt werden. Dazu bedarf es allerdings einer Unterrichtskonzeption, die die Kinder weniger in „homogenisierte Gruppen“ aufteilt oder an „individualisierten Lernpfaden“ arbeiten lässt, sondern die eine Balance zwischen Vielfalt und Gemeinsamkeit schafft. Ebenso wie beim kooperativen Mathematiklernen bieten sich hier Lernumgebungen an, die multiple Fähigkeiten herausfordern und verschiedene Zugänge bieten und somit implizieren, dass Kinder mit unterschiedlichen Begabungen gemeinsam arbeiten und sich bereichern können.

Wenn im jahrgangsgemischten Mathematikunterricht Kinder mit unterschiedlichen Erfahrungen an einer strukturanalogen Aufgabe gemeinsam aus verschiedenen „Blickwinkeln“ wesentliche Strukturen vorausschauend erkennen bzw. vertiefend durchdringen, ergeben sich besondere Chancen, konzeptuelles Wissen aufzubauen. Die Kinder erhalten somit unter Ausschöpfung ihrer individuellen Lernmöglichkeiten nicht nur die Gelegenheit, mathematisches Wissen aktiv-entdeckend auf- und auszubauen und mit anderen auszutauschen, sondern zudem die Möglichkeit der reflexiven Vor- bzw. Rückschau auf eigene und andere Lernprozesse und damit verbunden der tiefer gehenden Einsicht in mathematische Grundstrukturen, die im Rahmen des Spiralprinzips wiederkehrend thematisiert werden.

Die besonderen Lernchancen werden einerseits durch eine ganzheitliche Interpretation der zentralen mathematischen Inhalte („Parallelisierung“) unterstützt. Andererseits eignen sich für den jahrgangsgemischten Mathematikunterricht offene Aufgaben, die im Sinne der natürlichen Differenzierung jedes Kind unabhängig vom Einschulungsjahrgang ansprechen und herausfordern, so dass der Zwang zu einem gleichschrittigen Lernen entfällt. Darüber hinaus ergibt sich aus der Verknüpfung der besonderen Situation

einer jahrgangsgemischten Klasse (ältere und jüngere Kinder) mit den Besonderheiten des Faches Mathematik die Möglichkeit für die Kinder, neue Ansichten auf mathematische Strukturen und Beziehungen zu gewinnen und auf aktive Weise Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Ideen, Repräsentationen und Strukturen herzustellen. Insofern unterliegt der gemeinsame jahrgangübergreifende Mathematikunterricht der Orientierung am Fach und der Auffassung von Mathematik als „Wissenschaft von (interaktiv erschließbaren, fortsetzbaren und selbst erzeugbaren) Mustern“ (Wittmann 2003, S. 29).

Das gemeinsame Lernen stellt besondere Anforderungen an die Lehrkraft, da sie nicht nur Ideen zur Aufbereitung geeigneter Aufgaben entwickeln muss, sondern vor allem auch die Kinder zu verdichteten Interaktionen führen muss und es schwierig ist, die Effektivität von Interaktionen zu beeinflussen und zu sichern, ohne direkt zu steuern (s. hierzu auch Kap. 3). Um verdichtete Interaktionen zwischen den Kindern über mathematische Entdeckungen, Beziehungen und Strukturen erfolgreich zu initiieren, bedarf es eines flexiblen Repertoires an und eines sensiblen Gespürs für Interventionen. Ferner setzt es ein Bewusstsein voraus, dass sich das mathematische Wissen der Kinder im dialogischen Unterrichtsgeschehen entwickelt, und dass es nicht als fertiger Stoff vorgegeben ist. Dabei wird die Kooperation unter Kolleginnen und Kollegen zu einem bedeutsamen Tätigkeitsbereich einer Lehrkraft, die zum einen auf die Planung gemeinsamer Unterrichtstätigkeiten und zum anderen auf die kooperative Reflexion über erfolgreiche und lernhemmende Unterrichtsprozesse und somit über persönliche Haltungen zum jahrgangsgemischten Mathematikunterricht ausgerichtet ist (vgl. Steinbring 2003).

#### **4.1 Berücksichtigung des Spiralprinzips durch Parallelisierung**

Der jahrgangsgemischte Mathematikunterricht impliziert eine „Parallelisierung“ (Nührenböcker & Pust 2005) der zeitgleichen Erarbeitung analoger Aufgaben in unterschiedlichen Zahlenräumen, so dass innerhalb eines strukturierten Rahmens alle Kinder herausgefordert und zum Austausch des eigenen Denkens mit den Zugangsweisen und Ideen anderer Kinder angeregt werden. Unter Beachtung der hierarchischen Struktur mathematischer Inhalte können Themen, die im Rahmen des Spiralprinzips bisher auf zwei Jahre verteilt wurden, zu Modulen verknüpft werden (wie z.B. die Einführung und Orientierung sowie das operative Rechnen im Zahlenraum bis 20 bzw. 100, der Umgang

mit Formen, Figuren und Körpern sowie mit Zeitspamen, Geldwerten und Längen). Die Idee der Parallelisierung gleicher und strukturanaloger Inhalte für den Ausbau konzeptuellen Wissens gewährt somit die Balance zwischen Individualisierung und Interaktion.

Dabei setzen sich die Kinder mit Ganzheiten auseinander, die in sich strukturiert und überschaubar sind, so dass diese zerlegt werden können und somit jederzeit Detailbetrachtungen und Fokussierungen möglich sind. „Es klingt zunächst paradox, ist aber ein grundlegendes Gesetz des Lernens: Innerhalb gewisser Grenzen bedeutet eine höhere Komplexität der Lernsituation keine Erschwerung, sondern eine Erleichterung des Lernens“ (Wittmann 1991, S. 275). Dazu ist das Spektrum der Aufgaben ebenso wie Arbeits- und Veranschaulichungsmittel auf schuljahresübergreifende Einheiten auszudehnen. Zu letzterem werden als Beispiel Aktivitäten zum „Rechenstrich“ vorgestellt:

**Anregung 6: Überlegen Sie sich, inwieweit die von Ihnen im 1. und 2. Schuljahr verwendeten Veranschaulichungsmittel jeweils so zu einem Material modifiziert werden können, dass sie von allen Kindern im jahrgangsgemischten Unterricht genutzt werden können. Im Anhang finden Sie als Beispiel eine mediale Parallelisierung des 20er- und 100er-Feldes.**

Am „Rechenstrich“ (auch „leerer Zahlenstrahl“ oder „Denkstrich“ genannt) werden Zahlen mit ihren Beziehungen zueinander als Abstände entsprechend der eigenen geometrisch-räumlichen Zahlvorstellungen „ungefähr“ notiert. Als Rechenstrich wird ein horizontaler Strich bezeichnet, der ggf. nur am Anfang eine Skalierung aufweist. Weitere Zahlen werden von den Kindern individuell unter Beachtung der Reihenfolge markiert, während Rechenwege mit Bögen gekennzeichnet werden.

Der Rechenstrich ist auf Grund seiner Offenheit, seiner geringen Einzelinformationen und der individuellen Notation von Zahlen besonders geeignet, Zahlbeziehungen und Rechenwege in unterschiedlichen Zahlenräumen darzustellen und von einem Zahlenraum auf den anderen zu übertragen. Die strukturanaloge Arbeit auf gänzlich unterschiedlichem Niveau fordert zum Austausch unterschiedlicher Einsichten heraus. Der flexible Umgang gestattet den SchülerInnen und Schülern die Fortführung eigener Erkenntnisse und schließlich die Einsicht in strukturelle Zusammenhänge, indem sie sich mit den eigenen „alten Vorgehensweisen“ aus dem Jahr zuvor auseinander setzen und diese auf einen größeren Zahlenraum übertragen.

An den folgenden Dokumenten von Kindern einer jahrgangsgemischten Lerngruppe 1 und 2 (die älteren Kinder sind kursiv gekennzeichnet) wird deutlich, wie sie Zahlen unterschiedlicher Größe mit verschiedenen Lokalisationsstrategien positionieren

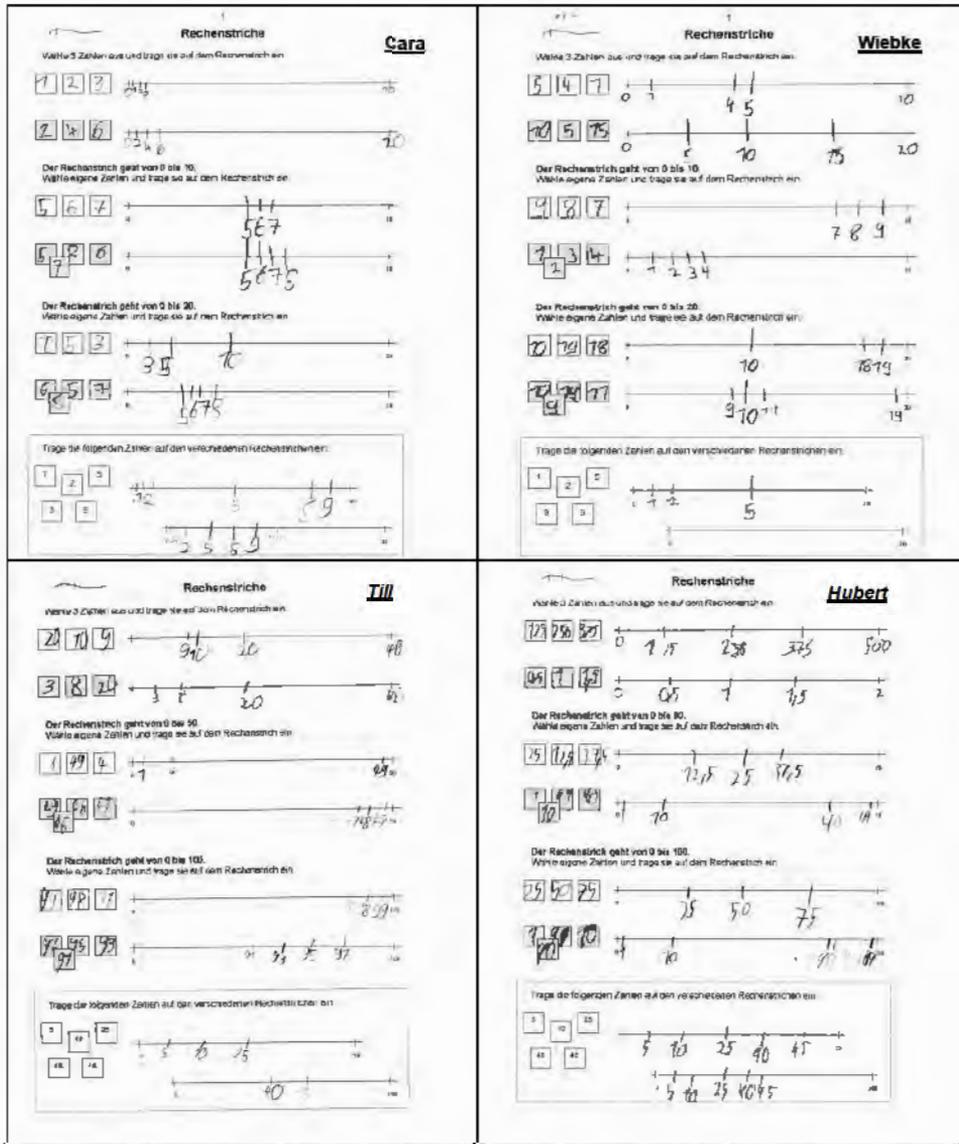


Abb. 7: Positionierung von Zahlen am Rechenstrich (aus: Nührenbörger & Pust 2006)

- Cara erprobt zunächst an kleineren Zahlen die Verteilung in Einer- und Zweier-sprüngen. Über das Auffinden der Mitte gelingt es ihr, auch größere Zahlen als Nachbarn zu positionieren.

- Wiebke und *Till* nutzen ähnliche Ideen zur Auswahl der Zahlen: Abschnitte werden halbiert oder Nachbarzahlen von besonderen Zahlen werden notiert.
- *Hubert* fordert sich dadurch heraus, dass er sowohl große wie auch ganz kleine Zahlen wählt. Seine Rechenkompetenzen stellt er beim Umgang mit Zahlen weit über den 100er-Raum ebenso heraus, wie beim Umgang mit Dezimalbrüchen. Hierbei nutzt er sein Wissen um Analogien zwischen den verschiedenen Zahlen, indem er die verschiedenen Rechenstriche viertelt.

**Anregung 7: Übertragen Sie die Aufgabenstellung auch auf die Anforderungen für Kinder in der 3. und 4. Klasse und führen Sie sie in den verschiedenen Jahrgängen durch. Welche Unterschiede zeigen sich bei der Notation von Zahlen an den Rechenstrichen zwischen den Kindern? Gelingt es den Kindern, strukturelle Analogien zwischen den Zahlenräumen zu erkennen und aufzugreifen? Lassen Sie die Kinder auch zusammenarbeiten und beobachten Sie, inwieweit sie in der Lage sind, sich gemeinsam über die Sache auszutauschen?**

In der im 2-Jahres-Rhythmus wiederkehrenden Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsstoff erleben alle Kinder diesen von verschiedenen Seiten. Sie durchlaufen zu unterschiedlichen Zeiten die Phasen des Orientierens und Einführens sowie des Übens, Vertiefens und Erweiterns. Somit kann jedes Kind sein Wissen nach und nach erweitern und festigen. „ (...) Bereits Erkanntes wird gefestigt und um neue Erkenntnisse erweitert, bis man vom Beherrschen des Stoffes ausgehen kann. Dabei können die Kinder der gleichen Generation (...) zusammenarbeiten oder auch Kinder verschiedener Generationen“ (vgl. Franke 1997, S. 18). Da zudem zur gleichen Zeit innerhalb der Lerngruppe verschiedene Kinder unterschiedliche Phasen des Mathematiklernens durchlaufen, wird für alle Kinder das Spiralprinzip lebendig und in der Vor- und Rückschau transparent.

Jüngere Schülerinnen und Schüler erhalten durch das strukturierte, komplexe Angebot vielfältige Anregungen und können bereits frühzeitig weit reichende Beziehungen aufbauen und die Beiträge der älteren Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf ihre „Zone der nächsten Entwicklung“ verarbeiten. „Das „Miteinanderdenken“ mit einem etwas kompetenteren Partner ermöglicht Lernfortschritte und macht kooperatives Lernen effektiv“ (vgl. Konrad & Traub 2001, S. 10).