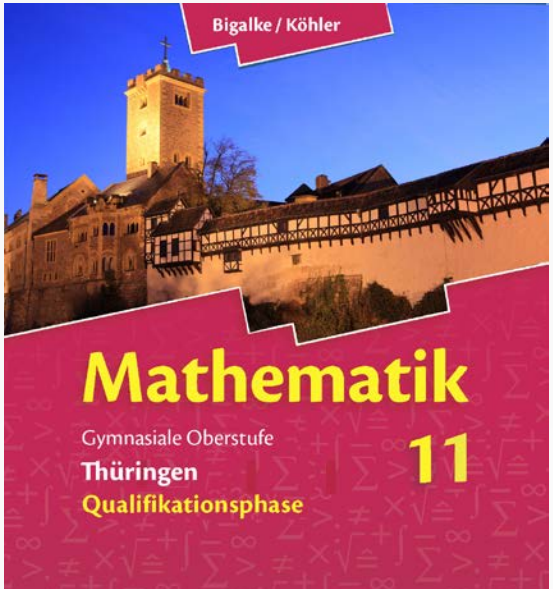
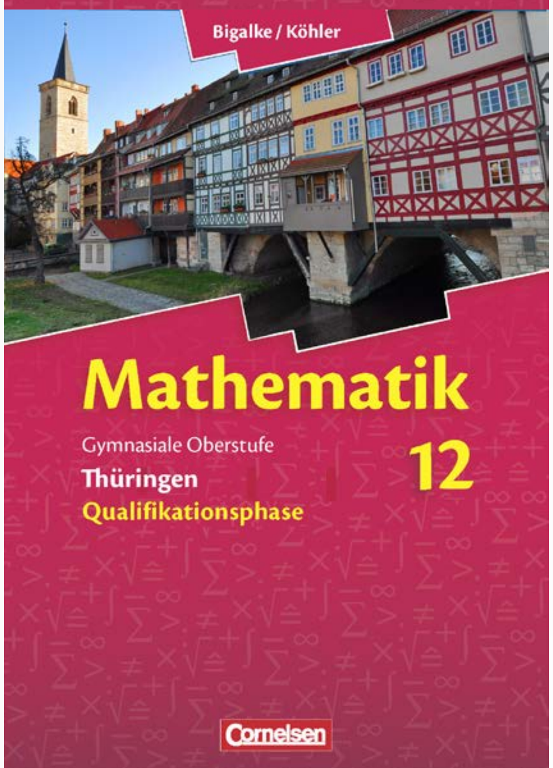
Lehrplan 2013: Klassenstufe 11: 2015/16
Klassenstufe 12: 2016/17





Mathematik

weiterentwickelter Lehrplan
für den Erwerb
der allgemeinen Hochschulreife

Thüringer Lehrplan 2013

Analytische Geometrie und Vektorrechnung

Erfurt, 05.03.2015
Wolfgang Häfner

Analytische Geometrie und Vektorrechnung

Änderungen im Lehrplan 2013 unter besonderer Betrachtung

der Untersuchung von Lagebeziehungen und
der Berechnung von Abständen

Hinweise zu entsprechenden Lehrbuchinhalten

Lehrplan:

– Koordinatenebenen durch Gleichungen in der Koordinatenform beschreiben

– Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Koordinatenebenen untersuchen

– Schnittpunkte und Schnittwinkel zweier Geraden berechnen

– Schnittpunkte von Geraden und Koordinatenebenen bestimmen

– Vorgehensweisen bei der Bestimmung der gegenseitigen Lage von Geraden und Koordinatenebenen ohne Hilfsmittel erläutern

– Schnittwinkel einer Geraden mit einer Koordinatenebene ermitteln

– Abstände berechnen:
  - Punkt – Punkt
  - Punkt – Gerade
  - Punkt – Koordinatenebene

Von den Themen 1 und 2 ist mindestens eines zur Bearbeitung auszuwählen.

Thema 1 „Ebenen“

- Ebenengleichungen in Parameterform und parameterfreier Form erläutern und ermitteln

- Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen untersuchen

- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen

Konkret zu Lagebeziehungen und Abständen

Alle Schüler müssen unabhängig von der Wahl des Vertiefungsthemas folgendes können:

- Lagebeziehung zwischen Punkt und Gerade untersuchen
- Lagebeziehung zwischen Punkt und Koordinatenebene untersuchen
- Lagebeziehung zweier Geraden untersuchen
- Lagebeziehung zwischen Gerade und Koordinatenebene untersuchen

- Abstand zweier Punkte berechnen
- Abstand eines Punktes von einer Geraden berechnen
- Abstand eines Punktes von einer Koordinatenebene ermitteln

Damit sind auch folgende Probleme gelöst:

- Abstand paralleler Geraden
- Abstand einer Geraden zu einer Koordinatenebene für den Fall der Parallelität

Schülerinnen und Schüler, die das Vertiefungsthema 1 „Ebenen“ bearbeiten, müssen bezüglich Lagebeziehungen und Abstände folgendes können:

- **Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene untersuchen**
- **Lagebeziehung zweier Ebenen untersuchen**

- **Abstand eines Punktes von einer Ebene berechnen**
- **Abstand windschiefer Geraden berechnen**

Mit dem Abstand Punkt-Ebene sind auch folgende Probleme gelöst:

- **Abstand einer Geraden von einer Ebene bei Parallelität**
- **Abstand zweier paralleler Ebenen**

Lehrbuchanpassungen

VII. Vektoren

1. Punkte im Koordinatensystem

Klasse 11

In diesem Abschnitt wird die Lage von Punkten im Koordinatensystem und der Abstand eines Punktes von den Koordinatenebenen behandelt.

V. Geraden

1. Geraden im Raum . . . .
2. Lagebeziehungen . . . .
3. Geradenscharen . . . .
4. Exkurs: Spurpunkte mit Anwendungen .

Klasse 12

Vorgesehene Anpassung an den Lehrplan:

V. Geraden und Koordinatenebenen

1. **Geraden im Raum/Koordinatenebenen**
2. **Lagebeziehungen**
3. **Winkel und Abstände**
4. **Geradenscharen**

Lehrbuchanpassungen

VI. Vertiefungsthema 1: Ebenen

1. Ebenengleichungen . . . . .
2. Lagebeziehungen . . . . .

CAS-Anwendung . . . .

VII. Winkel und Abstände

1. Schnittwinkel . . . .
2. Abstandsberechnungen . .

CAS-Anwendung . . . .

Klasse 12

Vorgesehene Anpassung an den Lehrplan:

VI. Vertiefungsthema 1: Ebenen

1. **Ebenengleichungen**
2. **Lagebeziehungen**
3. **Winkel und Abstände**

Weitere relevante Lehrplanänderungen

– zwei bzw. drei Vektoren auf lineare Abhängigkeit untersuchen und das Ergebnis geometrisch interpretieren,

– einfache Sachverhalte mit Tupeln beschreiben,

Unterabschnitt zum Skalarprodukt (Kl. 11)
3. Das Skalarprodukt in der Wirtschaft
Hier erfolgt auf Seite 335 die Erweiterung auf n-Tupel.

Im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt findet sich im Lehrplan kein Hinweis mehr auf Beweise.

– Punkte, Strecken, Geraden, Flächen und Körper im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem darstellen und ihre Lage beschreiben,

*Da im Rahmen der Analytischen Geometrie auch Strecken zu behandeln sind, wird der neue Unterabschnitt **D. Die Strecke AB** (beginnend auf Seite 167) eingefügt.*

*Dafür entfällt der alte Unterabschnitt **D. Exkurs: Geraden in der Ebene**.*

CAS-Lösungsbeispiele
zu Lagebeziehungen und Abständen

Abstand windschiefer Geraden

Der Ansatz beruht auf folgenden Überlegungen:

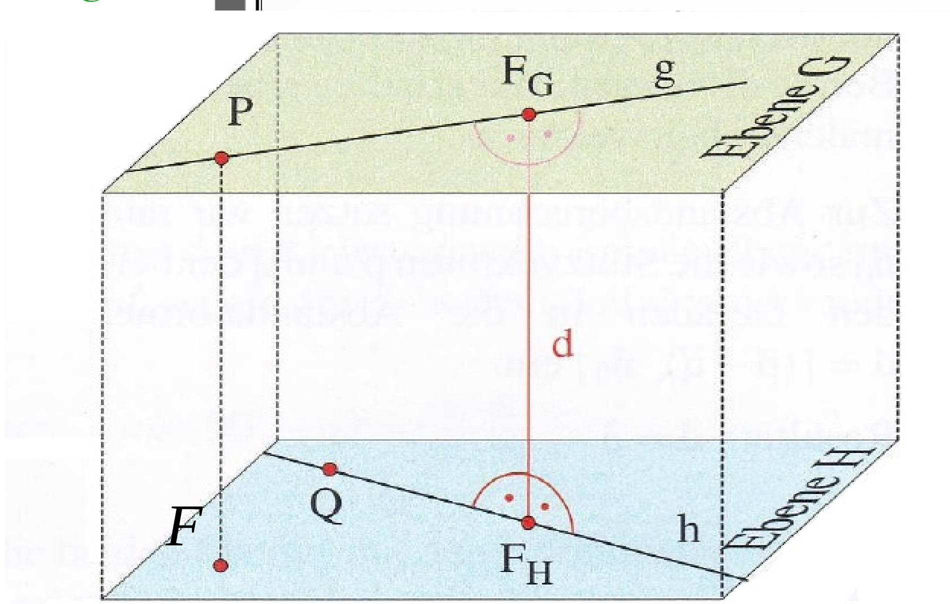
1. **Es gibt genau zwei parallele Ebenen, in der je eine windschiefe Gerade liegt. Normalenvektoren dieser Ebenen sind orthogonal zu Richtungsvektoren beider Geraden.**
2. **Der gesuchte Abstand ist deshalb der Abstand der Ebenen und wird mit der folgenden Gleichung ermittelt.**

$$\left|\overrightarrow{FP}\right| = \overline{F_H F_G} = \frac{\left|\vec{n}\cdot\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

$$\mathbf{g}(t):=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \blacktriangleright \textit{Fertig} \qquad \mathbf{h}(r):=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix} \blacktriangleright \textit{Fertig}$$

$$\mathbf{n}:=\mathrm{crossP}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\mathbf{n}\right)}{\mathrm{norm}(\mathbf{n})} \blacktriangleright 3$$



Abstand windschiefer Geraden mit Ermittlung der „Abstandspunkte“

Der Ansatz beruht auf folgenden Überlegungen:

1. **F_G und F_H sind jeweils Geradenpunkte.**

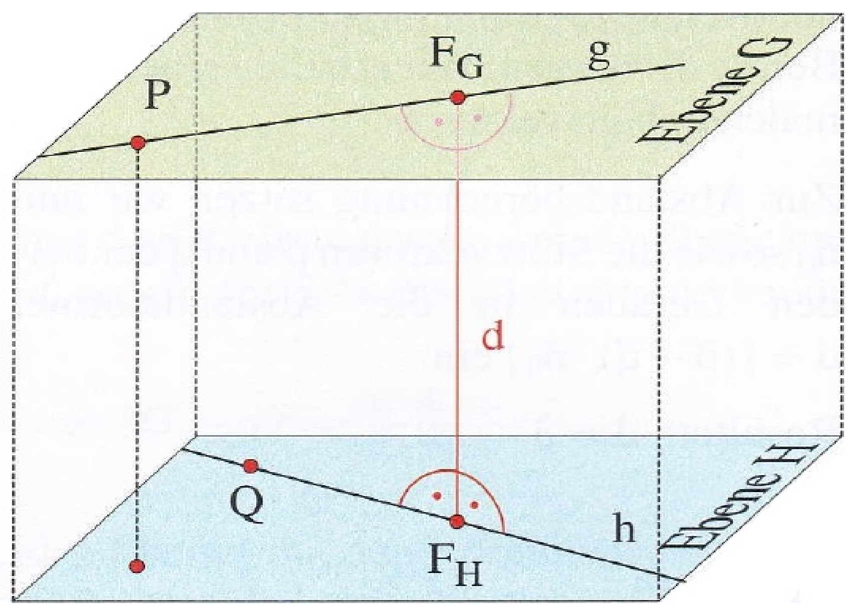
2. **Der Vektor $\overrightarrow{F_H F_G}$ ist parallel zu einem Vektor, der auf den Richtungsvektoren beider Geraden senkrecht steht.**

$$\text{solve}(\mathbf{g}(t)-\mathbf{h}(r)=s\cdot\mathbf{n},t,r,s)$$

$$\blacktriangleright\ t=2 \text{ and } r=^{-}1 \text{ and } s=1$$

$$\text{norm}(1\cdot\mathbf{n})\ \blacktriangleright\ 3$$

$$\mathbf{g}(2)\ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix}^{-}1\\3\\2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{h}(^{-}1)\ \blacktriangleright\ \begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$$



<u>Abstand windschiefer Geraden mit Ermittlung der „Abstandspunkte“</u>

Der Ansatz beruht auf folgenden Überlegungen:

1. **F_G und F_H sind jeweils Geradenpunkte.**

2. **Der Vektor $\overrightarrow{F_H F_G}$ ist orthogonal zu den Richtungsvektoren beider Geraden, also ist das Skalarprodukt jeweils Null.**

$$\mathrm{dotP}\left(\mathbf{g}(t)-\mathbf{h}(r),\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=0 \;\blacktriangleright\; r+2\cdot t-3=0$$

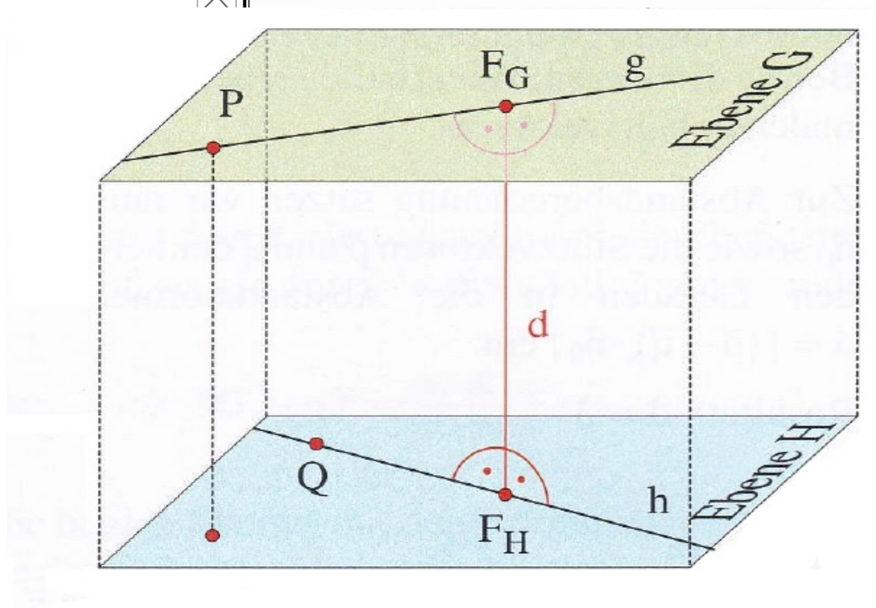
$$\mathrm{dotP}\left(\mathbf{g}(t)-\mathbf{h}(r),\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\right)=0 \;\blacktriangleright\; -5\cdot r-t-3=0$$

$$\mathrm{solve}(r+2\cdot t-3=0 \text{ and } -5\cdot r-t-3=0,r,t)$$

$$\blacktriangleright\; r=-1 \text{ and } t=2$$

$$\mathrm{norm}(\mathbf{g}(2)-\mathbf{h}(-1)) \;\blacktriangleright\; 3$$

$$(\mathbf{g}(2))^{T} \;\blacktriangleright\; [-1 \;\; 3 \;\; 2] \qquad (\mathbf{h}(-1))^{T} \;\blacktriangleright\; [0 \;\; 1 \;\; 4]$$



Abstand windschiefer Geraden
als minimaler Abstand

Zu jedem Punkt der einen Geraden gehört ein Punkt der anderen Geraden mit minimalem Abstand. Unter diesen Abständen wird der minimale gesucht.

$\mathbf{e}(t,r):=\operatorname{norm}(\mathbf{g}(t)-\mathbf{h}(r)) \;\blacktriangleright\; \textit{Fertig}$

$\operatorname{fMin}(\mathbf{e}(t,r),t) \;\blacktriangleright\; t=\dfrac{^{-}(r-3)}{2}$

$\operatorname{fMin}(\mathbf{e}(t,r),r) \;\blacktriangleright\; r=\dfrac{^{-}(t+3)}{5}$

$\operatorname{solve}\left(t=\dfrac{^{-}(r-3)}{2} \text{ and } r=\dfrac{^{-}(t+3)}{5},t,r\right) \;\blacktriangleright\; t=2 \text{ and } r=^{-}1$

$\mathbf{e}(2,^{-}1) \;\blacktriangleright\; 3$

$(\mathbf{g}(2))^{\mathsf{T}} \;\blacktriangleright\; \begin{bmatrix} ^{-}1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$(\mathbf{h}(^{-}1))^{\mathsf{T}} \;\blacktriangleright\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !